Gomory-Hu Trees

יהי $G=(V,E)$ גרף לא מכוון עם פונקציית משקל $C:E\to\mathbb{R}^+$.

המטרה: למצוא חתך מינימלי(=זרימה) בין כל זוג קודקודים בגרף.

פתרון נאיבי

נעבור על כל זוגות הקודקודים: $\binom{n}{2}$ אפשרויות, $n=|V|$. על כל זוג נחשב חתך מינימלי.

פתרון יותר טוב

נרצה להפוך את הגרף לעץ T, כך שיתקיים: החתך המינימלי בין שני קודקודים u,v בG=החתחת המינימלי בין שני הקודקודים u,v בT.

הגדרה

עץ Gomory-Hu לגרף לא מכוון $G=(V,E)$ ופונקציית משקל $c:E\to\mathbb{R}^+$ הינו עץ $T=(V,F)$ כך שלכל קשת $(u,v)\in F$ $\delta(U)$ הינו חתך $u-v$ מינימלי בG כאשר U הוא אחד מרכיבי הקשירות ב$T-(u,v)$

$$\delta(U)=(U,V\backslash U)$$

כאשר

$$c(\delta(U))=\sum_{\substack{u\in U\\ v\in V\backslash U\\ (u,v)\in E}} c(u,v)$$

הערה

T לא בהכרח מוכל בG.

לדוגמה:

$$G:\quad \begin{tikzcd} x \arrow[r, dash, "3"] & y \arrow[r, dash, "1"] & z \arrow[r, dash, "2"] & w \end{tikzcd}$$

$$T:\quad \begin{tikzcd} & x \arrow[r, dash, "1"] \arrow[dl, dash, "3"'] & w \arrow[dr, dash, "2"] & \\ y & & & z \end{tikzcd}$$

$$(x,w) \in T$$

$$(x,w) \notin G$$

הגדרה

$\alpha_G\left(U,V\right)$ - משקל החתך המינימלי בין u לv בגרף G.

טענה 1

<u>לכל $u,v,w \in V$</u>

$$\alpha_G\left(u,v\right) \geq \min\left\{\alpha_G\left(u,w\right),\alpha_G\left(w,v\right)\right\}$$

הוכחה(תרגיל)

בכל חתך מינימלי בין u לv w הוא או בצד של u או בצד של v.

טענה 2

לכל $v_1,v_2,...v_k \in V$

$$\alpha_G\left(v_1,v_k\right) \geq \min_{1\leq i<k}\left\{\alpha_G\left(v_i,v_{i+1}\right)\right\}$$

הוכחה: אינדוקציה

טענה 3

יהי $T=(V,F)$ עץ GomoryHu עבור גרף לא מכוון $G=(V,E)$. לכל $u,v\in V$ נגדיר שהקשת (x,y) על המסלול היחיד מu לv בT היא הקשת שעבורה $\alpha_G(x,y)$ מינימלי.
יהי U אחד מרכיבי הקשירות של $T-(x,y)$. אזי $\alpha_G(u,v)=\alpha_G(x,y)$ ו$\delta(U)$ הינו חתך מינימלי בין u לv.

מסקנה

אם משקל כל קשת $(x,y)\in T$ הוא $\alpha_G(x,y)$ אז $\alpha_G(u,v)=\alpha_T(u,v)$

הוכחה

$$\alpha_T(u,v)=c_T(x,y)=\alpha_G(x,y)=\alpha_G(u,v)$$

הוכחת טענה 3

מטענה 2: $\alpha_G(u,v)\geq\alpha_G(x,y)$ והמינימליות של $\alpha_G(x,y)$
($v_1,...v_k\in V$←הקודקודים במסלול לv בT)
מצד שני, $\delta(U)$ הוא חתך מינימלי בין x לy בG בG לפי הגדרת Gomory-Hu Tree,
וגם $\delta(U)$ הוא חתך כלשהו בין u לv.
$\alpha_G(u,v)\leq\alpha_G(x,y)$ כי $\alpha_G(u,v)$ המינימלי.
$\alpha_G(u,v)=\alpha_G(x,y)$⇐

טענה 4

יהיו $A,B\subseteq V$, אזי:

1. $\delta(A)+\delta(B)\geq\delta(A\cup B)+\delta(A\cap B)$
2. $\delta(A)+\delta(B)\geq\delta(A\backslash B)+\delta(B\backslash A)$

חוסכים בסימון: $\delta(A)=c(\delta(A))$

$$\delta(A)=(A,V\backslash A)$$

הוכחה

1. (תרגיל)(להסתכל על הקשתות מA לשאר הקודקודים ומB לשאר הקודקודים, ואז להסתכל על האיחוד והחיתוך שלהם.)

.2

$$\delta\left(A\right)+\delta\left(B\right)=\delta\left(V\backslash A\right)+\delta\left(B\right)\geq$$

$$\geq\delta\left(\left(V\backslash A\right)\cup B\right)+\delta\left(\left(V\backslash A\right)\cap B\right)=\delta\left(V\backslash\left(A\backslash B\right)\right)+\delta\left(B\backslash A\right)$$

טענה 5

יהיו $s,t\in V$ ויהי U חתך מינימלי בין s ל t ב G. יהיו $u,v\in U$ כאשר $u\neq v$. אזי קיים $W\subseteq U$ כך ש W הוא חתך מינימלי בין u ל v.

הוכחה

יהי X חתך מינימלי של u,v ב G. אם $X\subseteq U$ $\Leftarrow$ סיימנו.

- בה"כ $s\in U$ (אחרת נחליף בין s ל t).
- בה"כ $s\in X$ (אחרת נחליף בין X ל $V\backslash X$).
- בה"כ $u\in X$ (אחרת נחליף בין u ל v).

נסתכל על U,X:

$$\delta\left(U\cup X\right)+\delta\left(U\cap X\right)\leq\delta\left(U\right)+\delta\left(x\right)$$

נסתכל על $U\cup X,U$:

$$\delta\left(U\right)\leq\delta\left(U\cup X\right)$$

כי U הוא חתך מינימלי בין s ל t.

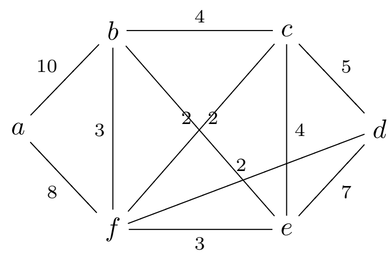
$$\Rightarrow\delta\left(U\cap X\right)\leq\delta\left(X\right)$$

אזי $W=U\cap X$ הוא חתך מינימלי בין U ל V שכולו ב U
נסתכל על $t\in X$

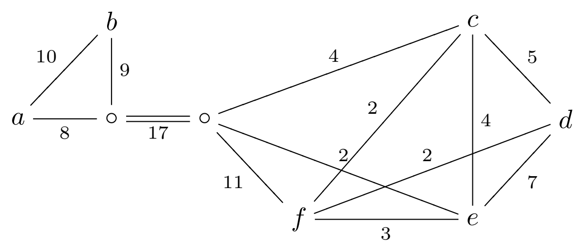
$$\delta\left(U\backslash X\right)+d\left(X\backslash U\right)\leq\delta\left(X\right)+\delta\left(U\right)$$

נסתכל על $U,X\backslash U$ חתכים $s-t$.

$$W=\mathrm{U/x}$$



בוחרים שני קודקודים: b, f. מחשבים חתך מינימלי בG:



בוחרים שני קודקודים a, b ומחשבים חתך מינימלי.