תרגיל 1 מופשטת 3

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. האם הפולינומים הבאים אי פריקים:

(א) $3x^2 - 7x - 5$ ב $\mathbb{Q}[x]$.
פתרון: אפשר כמובן לחפש שורשים עם נוסחת שורשים. אבל אפשר גם לעשות $\bmod 2$ ולקבל את הפולינום

$$x^2 + x + 1$$

שהוא מאותה דרגה כמו הפולינום המקורי ובנוסף הוא אי פריק כי הצבה של $0, 1$ לא מאפסת אותו.

(ב) $x^3 - 7x + 2$ ב $\mathbb{Q}[x]$.
פתרון: לפי הטריק של $\mathbb{Q}$, כל שורש $\frac{q}{r}$ חייב לקיים $q \mid 2$ ו $r \mid 1$ ולכן האופציות היחידות לשורשים מעל $\mathbb{Q}$ הם $\{\pm 1, \pm 2\}$. מציבים כל אחד מהם ורואים שהוא לא מאפס ולכן הפולינום אי פריק.

(ג) $x^3 - 7x + 2$ ב $\mathbb{Z}_5[x]$.
פתרון: ב $\mathbb{Z}_5$ הפולינום הזה הוא בעצם $x^3 - 2x + 2$. מציבים כל אחת מהאפשרויות ורואים שאין שורשים ולכן הפולינום אי־פריק.

(ד) $x^3 - 6x - 9$ ב $\mathbb{Q}[x]$.
פתרון: לפי הטריק של $\mathbb{Q}$, כל שורש $\frac{q}{r}$ חייב לקיים $q \mid 9$ ו $r \mid 1$ ולכן האופציות היחידות לשורשים מעל $\mathbb{Q}$ הם $\{\pm 1, \pm 3, \pm 9\}$. מציבים ורואים ש 3 הוא שורש ולכן הפולינום פריק.

(ה) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 2x + 1$ ב $\mathbb{Q}[x]$.
פתרון: נסתכל חזק ונשים לב ש

$$(x+1)^4 = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$$

ולכן

$$x^4+4x^3+6x^2+2x+1 = (x+1)^4-4x-1+2x+1 = (x+1)^4-2(x+1)+2$$

הפולינום שלנו אי פריק אם ורק אם

$$x^4 - 2x + 2$$

אי פריק. אבל $x^4 - 2x + 2$ אי פריק לפי קריטריון אייזנשטיין עם $p = 2$.

2. מצאו את הפירוק של הפולינום $x^4 - 2$ מעל השדות הבאים:

(א) $\mathbb{C}$.
פתרון: קל לראות ש

$$x^4 - 2 = (x^2 + \sqrt{2})(x^2 - \sqrt{2}) = (x - \sqrt[4]{2}i)(x + \sqrt[4]{2}i)(x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})$$

(ב) $\mathbb{R}$.

פתרון: קל לראות ש

$$x^4-2=(x^2+\sqrt{2})(x^2-\sqrt{2})=(x^2+\sqrt{2})(x-\sqrt[4]{2})(x+\sqrt[4]{2})$$

ו $x^2+\sqrt{2}$ אי פריק כי אין לו שורשים ממשיים.

(ג) $\mathbb{Q}$.

פתרון: הפולינום אי פריק לפי קריטריון אייזנשטיין

(ד) $\mathbb{Z}_3$.

פתרון: ננסה למצוא פירוק. ראשית, קל לוודא שאין לא שורשים ב $\mathbb{Z}_3$ ולכן אם יש פירוק

$$x^4-2=g(x)h(x)$$

בהכרח מתקיים ש $g(x)$ ו $h(x)$ ממעלה 2. נכתוב

$$g(x)=a_2x^2+a_1x+a_0$$

$$h(x)=b_2x^2+b_1x+b_0$$

אפשר להחליט בלי הגבלת כלליות ש $b_2=1$ (אחרת אפשר לכפול שת שני הפולינומים ב 2) ואז אפשר לכפול ולקבל:

$$g(x)h(x)=(a_2x^2+a_1x+a_0)(x^2+b_1x+b_0)=$$
$$=a_2x^4+(a_2b_1+a_1)x^3+(a_0+b_0a_2+a_1b_1)x^2+(b_1a_0+b_0a_1)x+a_0b_0$$

עכשיו נשווה מקדמים: מיידי לקבל ש

$$a_2=1$$

מהשוואת המקדם של x^3 נקבל ש

$$a_1=-b_1$$

שימו לב שזה מכריח ש

$$a_1b_1=-b_1^2\in\{0,2\}$$

מהשוואת המקדם החופשי נקבל

$$a_0b_0=1$$

וזה מכריח $a_0=b_0=1$ או $a_0=b_0=2$. אם $a_0=b_0=1$ אז מהשוואת מקדם ה x נקבל ש

$$a_0+b_0+a_1b_1=2+a_1b_1\in\{1,2\}$$

בסתירה לכך שצריך לקבל 0. ננסה את האופציה $a_0=b_0=2$. במצב זה

$$a_0+b_0+a_1b_1=1+a_1b_1\in\{0,1\}$$

אז צריך לקחת $a_1=2$ ו $b_1=-2$. ונקבל פירוק

$$x^4-2=(x^2+2x+2)(x^2-2x+2)$$

אז הפולינום פריק.

3. יהי $f(x)=a_nx^n+\cdots+a_0$ פולינום עם מקדמים שלמים. נניח כי a_n , $f(0)$ ו $f(1)$ הם אי זוגיים. הוכיחו כי ל f אין שורשים ב $\mathbb{Q}$.
פתרון: נניח ש $\frac{q}{r}$ הוא שורש אז מתקיים

$$a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}r+\cdots+a_1qr^{n-1}+a_0r^n=0$$

כעת נשים לב ש q,r אי זוגיים כי $q\mid a_0=f(0)$ ו $r\mid a_n$. לכן עד כדי $\mod 2$ נקבל

$$0=a_nq^n+a_{n-1}q^{n-1}r+\cdots+a_1qr^{n-1}+a_0r^n=a_n+a_{n-1}+\cdots+a_1+a_0=f(1)\pmod 2$$

אבל לפי הנתון

$$f(1)=1\pmod 2$$

בסתירה.

4. יהי $f(x)\in\mathbb{Z}[x]$ ויהי p מספר ראשוני. נסמן ב $\psi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}_p$ את ההומומורפיזם ששולח מספר למודולו שלו. את ψ אפשר להרחיב ל

$$\psi:\mathbb{Z}[x]\to\mathbb{Z}_p[x]$$

לפונקציה שפועלת על פולינומים (פשוט עושים מודולו לכל מקדם) כך שההרחבה היא עדיין הומומורפיזם. נניח ש $\deg\psi(f(x))=\deg f(x)$ ו $\psi(f(x))$ אי פריק, הוכיחו כי $f(x)$ אי פריק.
הדרכה: נניח בשלילה ש $f(x)=g(x)h(x)$ הוא פירוק לפונקציות לא הפיכות. שימו לב ש:

$$\psi(f(x))=\psi(g(x))\psi(h(x))$$

עכשיו שימו לב שמשהו בדרגות של הפולינומים לא מסתדר.
פתרון: היות ש $g(x)$ ו $h(x)$ לא הפיכים מתקיים

$$\deg g(x),\deg h(x)\geq 1$$

ולכן

$$\deg h(x)<\deg h(x)+\deg g(x)=\deg f(x)$$

אבל $\psi(f(x))$ אי פריק ולכן אחד מבין $\psi(g(x)),\psi(h(x))$ הוא הפיך. בלי הגבלת כלליות $\psi(g(x))$ הפיך ולכן $\deg\psi(g(x))=0$כעת

$$\deg f(x)=\deg\psi(f(x))=\deg\psi(g(x))+\deg\psi(h(x))=\deg\psi(h(x))\leq\deg h(x)$$

אבל לפי החישוב שעשינו קודם $\deg h(x)<\deg f(x)$ בסתירה.