

תרגיל בית 8 במתמטיקה בדידה 2 להנדסה, תשע"ט

25 ביוני 2019

הערה כללית: כל הגרפים כאן סופיים, ואם לא נאמר אחרת אז הם גם לא מכוונים.

1. יהי $G = (V, E)$ גרף קשיר, ותהי $e \in E$ קשת כך שהשמטתה הופכת את הגרף ללא-קשיר. הוכיחו שקיים ב- G קודקוד בעל דרגה אי-זוגית.

2. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט עם $|V| = n$, המקיים:

$$\forall v \in V : \deg(v) \geq \frac{n-1}{2}$$

הוכיחו: לכל שני קודקודים $u \neq v$ שאינם שכנים (כלומר, $\{u, v\} \notin E$), קיים שכן משותף (כלומר, קיים w כך ש- $\{u, w\} \in E \wedge \{v, w\} \in E$).

3. האם קיים גרף פשוט עם שישה קודקודים, שדרגות קודקודיו הן: 1, 1, 2, 3, 4, 5?

4. יהי $n \in \mathbb{N}$, ותהי $0 \leq d_1 \leq d_2 \leq \dots \leq d_n$ סדרת מספרים שלמים. הוכיחו שאם $d = \sum_{i=1}^n d_i$ מספר זוגי אז קיים גרף (לאו דוקא פשוט) $G = (V = \{v_1, \dots, v_n\}, E)$, המקיים: $\forall 1 \leq i \leq n : \deg(v_i) = d_i$. (הדרכה אפשרית: אינדוקציה)

5. יהי $G = (V, E)$ גרף לא ריק ומכוון (כלומר, $E \subseteq V \times V$).

(א) נניח ש- E היא פונקציה. הוכיחו: $\sum_{v \in V} d_{in}(v) = |V|$.

(ב) נניח ש- E היא פונקציה חח"ע. יהי $v \in V$, מצאו את $d_{in}(v)$.

6. יהי $G = (V, E)$ גרף מכוון וקשיר חזק. תהי $E' \supseteq E$. כיון ש- $E' \subseteq V \times V$ ניתן להתבונן עליה כיחס מ- V ל- V . נניח ש- E' יחס טרנזיטיבי, מצאו את הגרף $G' = (V, E')$.

7. במוזיאון ישראל תלויות תמונות משני צידי המסדרונות. בפני מבקרי המוזיאון עומדת הבעייה כיצד לראות את כל תמונות המוזיאון מבלי לבקר במסדרון יותר מפעמיים, כאשר במעבר במסדרון הם מתבוננים על תמונות התלויות בצד אחד בלבד של המסדרון. בסיום הביקור הם רוצים להגיע לנקודת המוצא. הוכיחו שניתן לערוך ביקור כזה במוזיאון.

8. יהי $G = (V, E)$ גרף פשוט, קשיר ומישורי. הוכיחו שקיים קודקוד שדרגתו לכל היותר 5. הדרכה: השתמשו במה שהוכחנו בתרגול $e \leq 3(v - 2)$.

9. גרף פטרסן $G = (V, E)$ מוגדר באופן הבא: תהי $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ קבוצה. קבוצת הקודקודים היא:

$$V = \{\{i, j\} \subseteq X \mid i \neq j\}$$

(כלומר, קודקודי הגרף הם קבוצות עם שני איברים מ- X , כמו $\{1, 2\}, \{2, 3\}$). קבוצת הצלעות היא:

$$E = \{\{\{i, j\}, \{n, m\}\} \mid \{i, j\} \cap \{n, m\} = \emptyset\}$$

(כלומר, יש צלע בין $\{i, j\}$ ו- $\{n, m\}$ אם ורק אם $\{i, j\} \cap \{n, m\} = \emptyset$). למשל, הקודקודים $\{1, 2\}$ ו- $\{3, 5\}$ יחוברו בצלע, ואילו הקודקודים $\{1, 2\}$ ו- $\{1, 4\}$ לא.

(א) מה מספר הקודקודים בגרף?

(ב) מהי דרגת כל קודקוד?

(ג) הסיקו את מספר הצלעות בגרף.

(ד) עובדה: בגרף פטרסן אין מעגל מאורך קטן מ-5. הוכיחו שגרף פטרסן איננו מישורי.