

מתמטיקה בדידה – פתרון תרגיל 1

1. (15 נק') מהי טבלת האמת של הביטויים:

א. $(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow b)$

ב. $(a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \leftrightarrow \neg b)$

ג. $(\neg a \leftrightarrow \neg b) \leftrightarrow (\neg a \leftrightarrow b)$

פתרון:

א.

a	b	$\neg a$	$a \rightarrow b$	$\neg a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \wedge (\neg a \rightarrow b)$
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	F
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	F	F

ב.

a	b	$\neg a$	$a \leftrightarrow b$	$\neg a \leftrightarrow b$	$(a \leftrightarrow b) \vee (\neg a \leftrightarrow b)$
T	T	F	T	F	T
T	F	F	F	T	T
F	T	T	F	T	T
F	F	T	T	F	T

ג.

a	b	$\neg a$	$\neg b$	$\neg a \leftrightarrow \neg b$	$\neg a \leftrightarrow b$	$(\neg a \leftrightarrow \neg b) \leftrightarrow (\neg a \leftrightarrow b)$
T	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	F	T	F
F	F	T	T	T	F	F

2. (20 נק') הוכח או הפרך בעזרת טבלאות אמת את השקילות של הפסוקים:

א. $(a \wedge b) \rightarrow a \equiv a \rightarrow (b \rightarrow a)$

ב. $a \wedge \neg(b \vee c) \equiv (a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$

ג. $a \leftrightarrow b \equiv (a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$

ד. $(a \rightarrow b) \rightarrow c \equiv a \rightarrow (b \rightarrow c)$

פתרון:

א. שני הפסוקים הם טאוטולוגיה ולכן שקולים.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \rightarrow a$	$b \rightarrow a$	$a \rightarrow (b \rightarrow a)$
T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T
F	T	F	T	F	T
F	F	F	T	T	T

ב. שני הפסוקים מקבלים אותם ערכים לוגיים ולכן שקולים.

a	b	c	$\neg b$	$\neg c$	$b \vee c$	$\neg(b \vee c)$	$a \wedge \neg(b \vee c)$	$a \wedge \neg b$	$a \wedge \neg c$	$(a \wedge \neg b) \wedge (a \wedge \neg c)$
T	T	T	F	F	T	F	F	F	F	F
T	T	F	F	T	T	F	F	F	T	F
T	F	T	T	F	T	F	F	T	F	F
T	F	F	T	T	F	T	T	T	T	T
F	T	T	F	F	T	F	F	F	F	F
F	T	F	F	T	T	F	F	F	F	F
F	F	T	T	F	T	F	F	F	F	F
F	F	F	T	T	F	T	F	F	F	F

ג. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן אינם שקולים.

a	b	c	$\neg a$	$\neg c$	$a \wedge b$	$\neg a \wedge \neg c$	$(a \wedge b) \vee (\neg a \wedge \neg c)$	$a \leftrightarrow b$
T	T	T	F	F	T	F	T	T
T	T	F	F	T	T	F	T	T
T	F	T	F	F	F	F	F	F
T	F	F	F	T	F	F	F	F
F	T	T	T	F	F	F	F	F
F	T	F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	T	F	F	F	F	T
F	F	F	T	T	F	T	T	T

ד. שני הפסוקים לא מקבלים תמיד את אותם ערכים לוגיים ולכן אינם שקולים.

a	b	c	$a \rightarrow b$	$(a \rightarrow b) \rightarrow c$	$b \rightarrow c$	$a \rightarrow (b \rightarrow c)$
T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	T	F	F	F
T	F	T	F	T	T	T
T	F	F	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	F	T
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

3. (20 נק') בטא בצורה שקולה את:

א. (5 נק') $(p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r)$ באמצעות הקשרים \vee , \neg בלבד.

ב. (5 נק') $(p \rightarrow \neg q) \rightarrow r$ באמצעות הקשרים \wedge , \neg בלבד.

ג. (10 נק') $((p \wedge q \wedge s) \vee r) \vee s$ באמצעות הקשרים \rightarrow , \neg בלבד.

פתרון:

$$\begin{aligned} \text{א. } (p \wedge q) \rightarrow (q \wedge r) &\Leftrightarrow \neg(p \wedge q) \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee (q \wedge r) \\ &\Leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \vee \neg(\neg q \vee \neg r) \end{aligned}$$

$$\text{ב. } (p \rightarrow \neg q) \rightarrow r \Leftrightarrow \neg(p \rightarrow \neg q) \vee r \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow \neg(\neg(p \wedge q) \wedge \neg r)$$

$$\text{ג. } ((p \wedge q \wedge s) \vee r) \vee s \Leftrightarrow \neg((p \wedge q \wedge s) \vee r) \rightarrow s \Leftrightarrow \neg(\neg((p \wedge q) \wedge s) \rightarrow r) \rightarrow s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg(p \wedge q) \vee \neg s) \rightarrow r) \rightarrow s \Leftrightarrow \neg(((p \wedge q) \rightarrow \neg s) \rightarrow r) \rightarrow s \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(\neg(\neg p \vee \neg q) \rightarrow \neg s) \rightarrow r) \rightarrow s \Leftrightarrow \neg(\neg(\neg(p \rightarrow \neg q) \rightarrow \neg s) \rightarrow r) \rightarrow s$$

4. (15 נק') עבור כל אחד מהזוגות הבאים, בדוק האם שני הפסוקים שקולים (ללא שימוש בטבלאות אמת):

א. $\neg(p \rightarrow q)$; $p \rightarrow \neg q$

ב. $(p \rightarrow q) \rightarrow p$; $p \rightarrow (q \rightarrow p)$

ג. $[p \rightarrow (q \vee r)] \wedge [(p \wedge r) \rightarrow q]$; $p \rightarrow q$

פתרון:

א. לא שקולים. אם $p = F$ $q = F$ אז $p \rightarrow \neg q = T$; $\neg(p \rightarrow q) = F$

ב. לא שקולים. אם $p = F$ $q = F$ אז $p \rightarrow (q \rightarrow p) = T$; $(p \rightarrow q) \rightarrow p = F$

ג. שקולים. ניתן להראות בעזרת טבלת אמת. הסבר אחר: אם $r = F$ אז צד שמאל שקול ל:

$$T \wedge [p \rightarrow q] \Leftrightarrow p \rightarrow q \quad \text{אם } r = T \text{ אז צד שמאל שקול ל: } [p \rightarrow q] \wedge T \Leftrightarrow p \rightarrow q$$

5. (10 נק') הקשר \downarrow (NOR) מוגדר על ידי טבלת האמת:

p	q	$p \downarrow q$
1	1	0
1	0	0
0	1	0
0	0	1

כמו כן $A \downarrow B = \neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$. הוכח כי $\{\downarrow\}$ היא קבוצה שלמה של קשרים. (רמז: השתמשו בעובדה כי $\{\neg, \vee\}$ היא קבוצה שלמה של קשרים).

פתרון:

נראה כי ניתן לבטא על-ידי הקשר \downarrow את הקשרים \neg ו- \vee :

$$p \downarrow p \Leftrightarrow \neg p \bullet$$

$$(p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q) \Leftrightarrow \neg(p \downarrow q) \Leftrightarrow p \vee q \bullet$$

6. (20 נק') פשטו את הביטויים הבאים:

- א. $\neg(p \vee q) \wedge q \vee r$
 ב. $[\neg(p \vee q)] \vee (\neg p \wedge q)$
 ג. $\neg(\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge p)) \vee [p \wedge (q \rightarrow \neg q)]$

פתרון:

$$\neg(p \vee q) \wedge q \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \wedge q \vee r \Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg q \wedge q) \vee r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg p \wedge F \vee r \Leftrightarrow (\neg p \wedge F) \vee r \Leftrightarrow F \vee r \Leftrightarrow r$$

$$[\neg(p \vee q)] \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q) \vee (\neg p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \wedge (\neg q \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge T \Leftrightarrow \neg p$$

$$\neg(\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge p)) \vee [p \wedge (q \rightarrow \neg q)] \Leftrightarrow_{q \rightarrow \neg q \equiv \neg q \vee \neg q \equiv \neg q} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(\neg(p \rightarrow q) \wedge (q \wedge p)) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow_{p \rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg((p \wedge \neg q) \wedge (q \wedge p)) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge (\neg q \wedge q) \wedge p) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \neg(p \wedge F \wedge p) \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow T \vee (p \wedge \neg q) \Leftrightarrow T$$

בהצלחה!