

פיסיקה למתמטיקאים

תרגיל 7: מכניקת הקוונטים: מרחב הילברט, אופרטורים

1. יהי H מרחב הילברט. הוכיחו:

- (א) אם $\{x_n\} \subset H$ סדרת קושי, אזי קיים $x \in H$ כך ש $\|x_n\| \rightarrow \|x\|$.
 (ב) אם $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$, כאשר $\{x_n\} \subset H$ סדרה, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ מתכנס ב H .

2. הוכיחו: אם $[B, [A, B]] = 0$ אז $[A, B^n] = nB^{n-1}[A, B]$ (הדרכה: הגדירו $g_n = [A, B^n]$ והוכיחו באינדוקציה את הרקורסיה $g_n = Bg_{n-1} + g_1B^{n-1}$. כעת רשמו את g_n כסכום $g_n = \sum_{k=0}^{n-1} B^k g_1 B^{n-k-1}$ והראו כי $g_n = nB^{n-1}g_1$ כאשר $[B, g_1] = 0$).

3. הוכיחו כי לכל וקטור $|\varphi\rangle$ במרחב הילברט H מתקיים $\|U\varphi\|^2 = \|\varphi\|^2$ ($\langle U\varphi|U\varphi\rangle = \langle\varphi|\varphi\rangle$) אם ורק אם U אופרטור יוניטרי. כלומר אופרטור U שומר על נורמה אם ורק אם $U^\dagger = U^{-1}$.
 (הדרכה: על מנת להוכיח כי U יוניטרי התבוננו בוקטור $|\varphi\rangle + \lambda|\chi\rangle$ כאשר $|\varphi\rangle, |\chi\rangle \in H$ ו $\lambda = 1$ ו $\lambda = i$ והסיקו כי U יוניטרי).

4. אוסילטור הרמוני קוונטי מתואר ע"י ההמילטוניאן $H = p^2/2m + m\omega^2 x^2/2$. השתמשו בתוצאה $\langle x|p^n|x'\rangle = (i\hbar)^n \delta(x-x') \frac{\partial^n}{\partial x^m}$ ובתנאי $\langle\psi|H|\psi\rangle/\langle\psi|\psi\rangle = E$ על מנת לקבל את משוואת שרדינגר עבור אוסילטור הרמוני

$$(1) \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x^2} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \psi(x) = E\psi(x).$$

5. נתון אופרטור התלוי בזמן $A(t)$.

(א) הוכיחו כי ההתפתחות בזמן של ערך התצפית של $A(t)$ נתונה ע"י

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \langle A \rangle = -\frac{i}{\hbar} \langle [A, H] \rangle + \left\langle \frac{\partial A}{\partial t} \right\rangle$$

(ב) השתמשו בתוצאת סעיף (א) כדי להוכיח את משפט ארנפסט המתאר את הקשר בין הדינמיקה של ערכי התוחלת של אופרטורי המקום והתנע עבור חלקיק בעל מסה m .

$$\frac{d}{dt}\langle p \rangle = -\left\langle \frac{dV}{dx} \right\rangle, \quad \frac{d}{dt}\langle x \rangle = \langle p \rangle / m$$

(ג) עבור אוסילטור הרמוני עם פוטנציאל $V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$, הראו כי התוחלת של אופרטור המקום נעה על פי המשוואה הקלאסית $\frac{d^2}{dt^2}\langle x \rangle = -\omega^2\langle x \rangle$.

6. חלקיק מוגבל לנוע על ציר x בלבד (בעיה חד מימדית) תחת השפעת פוטנציאל $V(x)$. כלשהוא

(א) אופרטור הזוגיות \hat{P} מוגדר כך שבמרחב x הפעולה שלו היא $\hat{P}\psi(x) = \psi(-x)$. מצאו את הערכים העצמיים של \hat{P} .

(ב) הוכיחו כי אם $V(x) = V(-x)$ אז $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$, כאשר \hat{H} הוא אופרטור האנרגיה של המערכת.

(ג) הוכיחו כי אם $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$ אז כל מצב עצמי קשור של האנרגיה הוא בעל זוגיות מוגדרת היטב, כלומר זוגי ($\psi(x) = \psi(-x)$) או אי זוגי ($-\psi(x) = \psi(-x)$).