

שאלון בחינה בקורס: גיאומטריה דיפרנציאלית 1
מרצה: פרופ' מיכאל כץ
סמסטר א', מועד א': כ"א בשבט תשס"ח (28.1.08)
משך הבחינה: שעתיים וחצי.

תרגילים למבחן:

1. א) יהי T טורוס. הראו שאם S משטח קומפקטי ב- R^3 שדיפאומורפי ל- T אז $\iint_S K dA = 0$.

ב) האם יכול להיות ש- $K=0$ בכל נקודה ב- S ?

ג) תנו דוגמה למשטח ב- R^3 בעל עקמומיות גאוס קבועה $= (-1/2)$.

ד) למה המשטח בסעיף ג) אינו קומפקטי?

2. מצא פרמטריזציה מהירות יחידה ועקמומיות של העקומות הבאות:

(1) $a: [0,1] \rightarrow R^2$ כך ש- $a(t) = (e^t, \sqrt{3}e^t)$.

(2) $a: R \rightarrow R^2$ כך ש- $a(t) = (r \cdot \cos(e^{-t}), r \cdot \sin(e^{-t}))$, כש- r קבוע.

(3) עקומת החיתוך של $x^2+y^2+z^2=20$ עם המישור $z=2$.

3. יהי a קבוע, ונסתכל על עקומת החיתוך של הספרה $x^2+y^2+z^2 = 16$ והמישור $x+y+2z = a$.

א) עבור איזה ערך של a עקומת החיתוך היא עקומה גיאודזית על גבי הספרה?

ב) עבור $a = 1$, מהי העקמומיות של עקומת החיתוך?

-- נסתכל על שתי נקודות על הספרה הנ"ל $p = (0,0,4)$ ו- $q = (1,3,\sqrt{6})$. מצאו את המרחק הכי קצר בין שתי נקודות אלה על גבי הספרה כך:

ג) העקומה הגיאודזית על גבי הספרה העוברת דרך 2 נקודות אלה היא מעגל. מהו רדיוסו? מהו היקפו?

ד) נסמן מרכז מעגל זה ב- a . מצאו את הזווית בין הישרים ap ו- aq .

ה) מצאו את המרחק הנ"ל.

4. יהי $x(u,v)$ משטח סיבוב של עקומת מהירות יחידה $\gamma(u) = (f(u), 0, g(u))$ ז"א

$$x(u,v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u))$$

א) מצאו את התבנית היסודית הראשונה g_{ij} .

ב) את סימני כריסטופל Γ_{ij}^k .

ג) הוכיחו שהמשוואות המתארות עקומה גיאודזית $a(t) = x(u(t), v(t))$ עליו הן:

$$\ddot{u} = f \cdot f_u (\dot{v})^2, \quad \frac{2f_u}{f} \dot{u}\dot{v} + \ddot{v} = 0$$

5. שאלה זו היא המשך של שאלה 5, כאשר מותר להניח שמה שהוכחתם בשאלה זו ידוע.

א) נסתכל על עקומות על x בעלת מהירות יחידה. מהי המשוואה המתארת תנאי זה? הביעו אותה רק על ידי $f(u), u(t), v(t)$ ו/או נגזרותיהם.

ב) נסתכל על עקומות גיאודזיות בעלות מהירות יחידה.

תהי c עקומה על x המתקבלת מהצבת $u = \text{const}$.

הוכיחו ש- c עקומה גיאודזית אם ורק אם $f_u := \frac{df}{du} = 0$.

ג) הוכיחו שעקומת החיתוך בין המישור $z=0$ ובין משטח הסיבוב (סביב ציר ה- z) של

$$z^2 + (x-5)^2 = 2$$

העקומה היא עקומה גיאודזית.