תרגיל בית 2 אינפי 3

1. תהינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קשירות. הוכיחו או הפריכו את הטעננות הבאות:

   (א) $A\cup B$ קשירה.

   (ב) $A\cap B$ קשירה.

   (ג) $A\backslash B$ קשירה.

   הערה: מותר להשתמש בכך שהמרחב $\mathbb{R}^n$, כדורים ותאים הם קבוצות קשירות.

2. תהינה $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות קומפקטיות, ותהינה $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ קבוצה של קבוצות קומפקטיות. הוכיחו או ההפריכו את הטענות הבאות:

   (א) $A\cup B$ קומפקטית.

   (ב) $A\cap B$ קומפקטית.

   (ג) $A\backslash B$ קומפקטית.

   (ד) $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ קומפקטית.

3. אם $A,B\subseteq\mathbb{R}^n$ שתי קבוצות. נגדיר $A+B=\{a+b \mid a\in A,\quad b\in B\}$.
   הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

   (א) אם A,B חסומות אז $A+B$ חסומה.

   (ב) אם A,B פתוחות אז $A+B$ פתוחה.

   (ג) אם A,B סגורות אז $A+B$ סגורה.

   (ד) אם A פתוחה ו B סגורה אז $A+B$ פתוחה.

4. האם גבול הסדרה הבאה קיים? ואם כן, מהו?

$$\left(\frac{n^3+4n+5}{n^6+2n^2+3},(1-\frac{1}{n})^n\right)$$

5. תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה ב $\mathbb{R}^n$. הוכיחו או ההפריכו: אם $y_n=d_2(x_n,0)$ היא סדרת מספרים עולה ממש אז x_n היא סדרה מתכנסת ב $\mathbb{R}^n$.
   הערה: d_2 היא המטריקה האוקלידית הסטנדרטית.