

תרגיל בית - מרטינגלים - תש"פ

11 במאי 2020

1. (Doob Process) X משתנה מקרי המקיים

$$\mathbb{E}[X] < \infty$$

ויהיו $\{Z_n\}_{n \geq 0}$ תהליך אקראי בדיד. נגדיר

$$\forall_n X_n = \mathbb{E}[X | \sigma(Z_0, \dots, Z_n)]$$

הוכח:

$$\forall_n \mathbb{E}[X_n] \leq \mathbb{E}[X] \quad (\text{א})$$

(ב) $\{X_n\}$ מרטינגל.

2. כד לא ריק מכיל b כדורים שחורים ו- w כדורים לבנים ביום 0. בכל יום עוקב, כדור נבחר באקראי מהכד (בהסתברות שווה ללא תלות בצבע הכדור) ואז מוחזר לכד עם כדור נוסף באותו הצבע. לפיכך, ביום ה- n יש $w + b + n$ כדורים בכד סך הכל. נגדיר את B_n להיות מספר הכדורים השחורים בכד ביום ה- n . הוכח:

(א) אם

$$\mathbb{P}[B_{n+1} - B_n = 1] = X_n$$

, וגם

$$\mathbb{P}[B_{n+1} - B_n = 0] = 1 - X_n$$

אזי

$$X_n = \frac{B_n}{b + w + n}$$

מרטינגל ביחס לסינון

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

3. יהי $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ מרטינגל. (כלומר, $\forall_n \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n$) הוכח:

$$\forall_{m > n} \mathbb{E}[X_m | \mathcal{F}_n] = X_n$$

4. יהי $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ סדרת משתנים מקריים בעלי תוחלת. נגדיר

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

נניח כי עבור $n \geq 1$

$$\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = aX_n + bX_{n-1}$$

כך ש- $a \in (0, 1)$ ו- $a + b = 1$. עבור אילו ערכי α המשתנה המקרי

$$S_n = \alpha X_n + X_{n-1}$$

הוא מרטינגל?

5. יהי $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ משתנים מקריים בעלי מומנט שני. נגדיר

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

ונניח כי

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

מגדיר מרטינגל לפי הסינון \mathcal{F}_n . הוכח:

$$\forall_{i \neq j} \mathbb{E}[X_i X_j] = 0$$

6. יהיו $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ משתנים מקריים בלתי תלויים המשתפלגים אחיד על הקטע $[0, 1]$. ביחס לסינון הטבעי, נגדיר

$$T = \inf\{n \geq 1 : X_n > X_0\}$$

הראה כי T הוא זמן עצירה.

7. יהיו $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ משתנים מקריים בלתי תלויים, כך ש-

$$\mathbb{E}[X_i] = m_i$$

$$\text{var}(X_i) = \sigma_i^2$$

נגדיר

$$S_n = X_1 + \dots + X_n$$

ו-

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

(א) מצא (b_n) ו- (c_n) סדרות של משתנים מקריים ממשיים כך ש-

$$S_n^2 + b_n S_n + c_n$$

מרטינגל.

8. יהיו $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ כך שלכל n, X_n המקבל את הערכים $0, \dots, 8$ מתפלג באופן מותנה ב- X_{n+1} לפי ההתפלגות $Bin(8, \frac{X_n}{8})$. נגדיר

$$\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$$

(א) הראה כי X_n מרטינגל.

(ב) נגדיר $T = \inf\{n \geq 0 : X_n = 0 \text{ or } X_n = 8\}$ הראה כי T הוא זמן עצירה.