## שם הקורס: חשבון דיפרנציאלי ואינטגראלי 2
## שבוע 2 .

**הנושא : טורים אינסופיים**

**1 . הגדרת הטור וסכומו . טור גיאומטרי (הנדסי) , הטור ההרמוני .**
**2. טורים של מספרים חיוביים . התכנסות והתבדרות .**
**3. מבחני ההשוואה .**
**4. מבחני d'Alembert (מבחן המנה) , Cauchy (מבחן השורש) , מבחן האינטגרל**
**5 . התכנסות בהחלט והתכנסות בתנאי . משפט Leibniz . מציאת סכומי טורים עם דיוק נתון.**

**משפט 1 .** (תנאי הכרחי להתכנסות טור) אם טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתכנס, אז $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ .

**הערה :** אם $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$ או לא קיים , אז טור $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ מתבדר .

**משפט 2 .** (תכונות של טורים)

(א) אם טורים $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ , $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנסים, אז הטורים הבאים

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n,$ $c$ - קבוע , (2) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ מתכנסים .

(ב) הוספה (הורדה) של כמות סופית של מחוברים בטור לא משפיע על התכנסותו או התבדרותו .
(ג) הכפלת מחוברים של הטור במספר $c \neq 0$ לא משפיע על התכנסותו או התבדרותו .

**משפט 3 .** (מבחן ההשוואה) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$ שני טורים חיוביים .

אם לכל $n$ החל ממספר מסוים מתקיים $a_n \le b_n$ ,אז

(א) מהתכנסותו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובעת התכנסותו של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ,

(ב) מהתבדרותו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת מהתבדרותו של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**משפט 4 .** (מבחן ההשוואה הגבולי) יהיו $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$ שני טורים חיוביים .

אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = k$ ו-

(א) $0 < k < \infty$ , אז הטורים $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n,$ מתכנסים או מתבדרים יחד .

(ב) $k = 0$ , אז מהתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ נובעת התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

(ג) $k = \infty$ , אז מהתכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ נובעת התכנסות של $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ .

**משפט 5** (מבחן האינטגרל)

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ טור חיובי ו- $f(n)$ ערך הפונקציה $f(x)$ בנקודה $x = n$ .

אם הפונקציה $f(x)$ חיובית ולא עולה בתחום $x \ge 1$ , אז

הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ והאינטגרל $\int_1^{\infty} f(x)dx$ מתכנסים או מתבדרים יחד .

**משפט 6** . מבחן המנה בצורה גבולית

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי . אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$ ( סופי או אינסופי )

(א) אם $q<1$ , אז טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ,

(ב) אם $q>1$ , אז טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר .

(ג) אם $q=1$ , המבחן אינו מספק מידע על התכנסות (התבדרות) של הטור .

**משפט 7** . **מבחן השורש** בצורה גבולית

יהי $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ טור חיובי . אם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ (סופי או אינסופי )

(א) אם $q<1$ , אז טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס ,

(ב) אם $q>1$ , אז טור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר .

(ג) אם $q=1$ , המבחן אינו מספק מידע על התכנסות (התבדרות) של הטור .

**משפט 8** (מבחן לייבניץ )

אם (א) הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית יורדת (ב) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ,אז הטור $a_n>0$ $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n,$

(1) מתכנס , (2) סכומו $S$ מקיים $0<S<a_1$ (3) השארית $|S-S_n|=|R_n|<a_{n+1}$ .

**הערה :** הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^p}$ (1) מתכנס בהחלט, עבור $p>1$ , (2) מתכנס בתנאי עבור $0<p\le 1$

(3) מתבדר, עבור $p\le 0$ .

**ספר לימוד : הווארד אנטון . '' חישבון דיפרנציאלי ואינטגרלי א'' ,כרך שני ,עמ' 622-650**

**ספר עזר : בן –ציון קון . '' חישבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2'' ,חלק א', פרק 1,2,3 ,עמ' 1-32**

## תרגילים

**1.** מצא את סכומו של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ .

פתרון : נרשום את הסכום ה- $n$ של הטור $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$

$\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ . כל המחובר ב- $S_n$ נרשום בצורה הזו :

$\frac{1}{1\cdot 2}=1-\frac{1}{2},\qquad \frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3},...\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$ . נקבל

$$S_n=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+...+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}$$

נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1$ , לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}=1$ .

**2.** קבע האם הטור הנתון מתכנס או מתבדר . אם הטור מתכנס ,מצא את סכומו .

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n-1}}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{5^{n-1}}$

פתרון :

(א) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n\cdot\frac{1}{2}}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{2^n}=2\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^n$ הטור הגיאומטרי מתבדר כי $q=\frac{3}{2}>1$.

(ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{5^{n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1+3}}{5^{n-1}}=8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{5^{n-1}}=8\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$ הטור הגיאומטרי מתכנס כי $q=\frac{2}{5}<1$.

$S_n=\frac{1-\left(\frac{2}{5}\right)^n}{1-\frac{2}{5}}=\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)$ , $\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{3}\left(1-\left(\frac{2}{5}\right)^n\right)=\frac{5}{3}$ ,לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+2}}{5^{n-1}}=\frac{40}{3}$

**3.** קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{n^3+1}$ מתכנס או מתבדר .

**פתרון** : נחשב את הגבול של האיבר הכללי $\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^3+1}=1$ . התנאי ההכרחי להתכנסות לא מתקיים $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$ ,לכן הטור מתבדר .

**4.** קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{n(n+2)}$ מתכנס או מתבדר .

**פתרון** : נשתמש במבחן ההשוואה .

$\frac{n+3}{n(n+2)}=\frac{1}{n}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)>\frac{1}{n}$ . הטור ההרמוני $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר ,לכן הנתון גם מתבדר .

**5.** קבע האם הטור מתכנס או מתבדר.

**(א)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2+5n+2}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^3-5n^2+1}}$

**פתרון** :

(א) נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי . הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3n^2}=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס .

נחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{3n^2+5n+2}}{\frac{1}{3n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2}{3n^2+5n+2}=1$ ,לכן הנתון גם מתכנס .

(ב) נשתמש במבחן ההשוואה הגבולי . הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3}{n}=3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר . נחשב את

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3\sqrt{n}+2}{\sqrt{n^3-5n^2+1}}}{\frac{3}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\left(3\sqrt{n}+2\right)}{3\sqrt{n^3-5n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n\sqrt{n}+2n}{3\sqrt{n^3-5n^2+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{\sqrt{n}}}{3\sqrt{1-\frac{5}{n}+\frac{1}{n^3}}}=1$$

,לכן הנתון גם מתבדר.

5. קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ מתכנס או מתבדר.

פתרון :

נשתמש במבחן האינטגרל : $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}=\int_2^{\infty}\frac{d(\ln x)}{\ln^2 x}=-\frac{1}{\ln x}\Big|_2^{\infty}<\infty$ , לכן הטור הנתון מתכנס .

**6.** קבע האם הטור מתכנס או מתבדר.

**(א)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ (ב) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n\cdot 2^n}$

**פתרון** :

(א) **נשתמש במבחן המנה** : $a_{n+1}=\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}, \quad a_n=\frac{n!}{n^n}$

**נחשב את הגבול** $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n(n+1)!}{n!(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}<1$

**לכן ,הטור** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ מתכנס .

(ב) **נשתמש במבחן המנה** : $a_{n+1}=\frac{n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}, \quad a_n=\frac{n-1}{n\cdot 2^n}$

**נחשב את הגבול** $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{n-1}{n\cdot 2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2 2^n}{(n^2-1)\cdot 2^{n+1}}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{(n^2-1)}=\frac{1}{2}<1$

**לכן ,הטור** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-1}{n\cdot 2^n}$ מתכנס .

**7.** קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$ מתכנס או מתבדר.

**פתרון** : נשתמש במבחן השורש : $\sqrt[n]{a_n}=\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}=\frac{n}{2n+1}$ נחשב את הגבול

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$ , לכן הטור הנתון מתכנס .

**9.** קבע האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ מתכנס או מתבדר.

**פתרון** : ניקח את $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ ונשתמש במבחן ההשוואה $\frac{|\sin n|}{n^2}\le\frac{1}{n^2}$

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ מתכנס ,לכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$ מתכנס בהחלט .

**10.** לטורים הבאים מצא את $n$ כך ש- $|S-S_n|=|R_n|<10^{-4}$ .

**(א)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}$ , וחשב את סכום הטור בדיוק $10^{-4}$ **(ב)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$

**פתרון:**

**לפי המשפט** $|S-S_n|<a_{n+1}$ . נחשב את $n$ עבורו $a_{n+1}\le 10^{-4}$ .

**(א)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}=-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+...$

$$n=3\Rightarrow a_4=\frac{1}{4!}\cong 0.04166$$

$$n=4\Rightarrow a_5=\frac{1}{5!}\cong 0.00833$$

$$n=5\Rightarrow a_6=\frac{1}{6!}\cong 0.00138$$

$$n=6\Rightarrow a_7=\frac{1}{7!}\cong 0.00019$$

$$n=7\Rightarrow a_8=\frac{1}{8!}\cong 0.00002<10^{-4}$$

**נחשב את** $S_7=\sum_{n=1}^{7}\frac{(-1)^n}{n!}=-1+\frac{1}{2!}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}-\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}-\frac{1}{7!}\cong -0.63214$

$$-0.63214-0.00002<\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}<-0.63214+0.00002\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\cong -0.6321$$

**(ב)** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2}\cong 1-\frac{1}{4}+\frac{1}{9}-\frac{1}{16}+\frac{1}{25}-...-\frac{1}{9801}$ , $n=99\Rightarrow a_{100}=10^{-4}$

**תרגילי מבחן . 4.07.04**

<u>שאלה 2.</u> ב. האם טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)(5\sqrt[3]{n}+2\sqrt[5]{n+2}-1)}$ מתכנס או מתבדר? (נמק\י)

**8.08.04** <u>שאלה 1</u> ב. יש לבדוק התכנסות וסוג התכנסות של טור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}+2\sqrt[3]{n^2+1}}$