בס"ד

פיתרון תרגיל 4

1. נתונים הבסיסים ב $\mathbb{R}^3$:

$$B=\left\{b_1=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},b_2=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix},b_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right\},C=\left\{c_1=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},c_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},c_3=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}$$

ונתונים הוקטורים ב $\mathbb{R}^3$: $d_1=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix},d_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix},d_3=\begin{pmatrix}6\\5\\0\end{pmatrix}$ (לפי בסיס סטנדרטי)

א. $[d_1]_B=\begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix},[d_2]_B=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix},[d_3]_B=\begin{pmatrix}8\\1\\-3\end{pmatrix}$.

ב. $[I]_E^B=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\0&3&1\end{pmatrix},[I]_B^E=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\1&-1&0\\-3&3&1\end{pmatrix}$,

$[I]_E^C=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&-1&1\\0&0&-1\end{pmatrix},[I]_C^E=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ ואת

$$[I]_B^C=[I]_B^E[I]_E^C=\begin{pmatrix}-2&5&-1\\-1&2&-1\\3&-3&2\end{pmatrix},[I]_C^B=[I]_C^E[I]_E^B=\begin{pmatrix}2&4&3\\1&1&1\\0&-3&-1\end{pmatrix}$$

ג. הראו שמתקיים עבור d_3 :

$$[d_3]_B=\begin{pmatrix}8\\1\\-3\end{pmatrix}=[I]_B^E[d_3]_E=\begin{pmatrix}3&-2&-1\\1&-1&0\\-3&3&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6\\5\\0\end{pmatrix}.$$

2. יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה F, ויהי $B=\{b_1,b_2,b_3,...,b_n\}$ בסיס של V.

א. נוכיח : $[v]_B=[w]_B$ אמ"מ $v=w$.

נניח $v=w$, ונניח בשלילה ש $[v]_B\neq[w]_B$. לפי משפט מסמסטר א', כל וקטור ניתן להצגה בצורה יחידה לפי כל בסיס שהוא. ולכן קיבלנו בעצם שתי הצגות שונות של אותו וקטור לפי בסיס B בסתירה.

בצורה דומה אם $[v]_B=[w]_B$ ולכן $v=w=\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\alpha_3b_3+\cdots+\alpha_nb_n$ וזהו בעצם אותו צ"ל ולכן זהים.

ב. נגדיר הע"ל $T:V\to\mathbb{F}^n$ מוגדרת בצורה הבאה : עבור $v\in V$ ישנה הצגה $v=\alpha_1b_1+\alpha_2b_2+\alpha_3b_3+\cdots+\alpha_nb_n$. נגדיר ההעתקה : $T(v)=[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\vdots\\\alpha_n\end{pmatrix}$.

זוהי הע"ל חח"ע היות והגרעין שלה הוא $\{0\}$ (קל להוכיח) . לפי משפט הדרגה
$\dim\ker T + \dim imT = n$ ולכן כאן נקבל ש $\dim imT = n$ ולכן זהו איזומורפיזם
כלומר ההעתקה היא על ולכן לכל $\vec{x} \in F^n$ יש $v \in V$ כך ש $[v]_B = \vec{x}$.

3. ניתן רק תשובות סופיות : $[T]_E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, [T]_B^E = \begin{pmatrix} 2 & -5 & -5 \\ 1 & -2 & -2 \\ -2 & 6 & 7 \end{pmatrix}$

4. סעיף ב'

$$[T]_E = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & . & . & \alpha_{n-1} & \alpha_n \\ 1 & 0 & . & . & 0 & 0 \\ 0 & 1 & . & . & 0 & 0 \\ & . & . & . & 0 & 0 \\ & . & & & & \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ & & & & & \end{pmatrix}$$

סעיף א: נמצא דטרמיננטה ע"י פיתוח לפי עמודה אחרונה ונקבל שהדטרמיננטה= פלוס/מינוס α_n (הפלוס/מינוס תלוי במספר העמודות)

כעת, T הפיכה אמ"מ הדטרמיננטה של המטריצה המייצגת שונה מ 0 אמ"מ α_n שונה מ 0.