בס"ד

משוואות דפרנציאליות רגילות 88-240

תרגילים 4 - פתרונות

נוסחאות מהשיעור

1. וריאציית מקדמים. אם y_1, y_2 הם שני פתרונות בת"ל של המשוואה

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

אזי ניתן למצוא את הפתרון הכללי של

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = b(x)$$

בצורה

$$y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$$

כאשר

$$\begin{aligned} C_1'y_1 + C_2'y_2 &= 0 \\ C_1'y_1' + C_2'y_2' &= b \end{aligned}$$

2. פתרון בעיית ערכים התחלתיים - המשוואה האי-הומוגנית עם $y(a) = y'(a) = 0$:

$$y(x,t) = \int_a^x K(x,t)b(t)dt \ , \qquad K(x,t) = \frac{y_1(t)y_2(x) - y_1(x)y_2(t)}{(y_1y_2' - y_2y_1')(t)}$$

הפונקציה $K(x.t)$ נקראת פונקציית הגרין לבעיית הערכים ההתחלתיים.

3. פתרון בעיית ערכי שפה - המשוואה האי-הומוגנית עם $y(\alpha) = y(\beta) = 0$:

$$y(x,t) = \int_\alpha^\beta G(x,t)b(t)dt \ , \qquad G(x,t) = \begin{cases} \dfrac{y_1(t)y_2(x)}{(y_1y_2' - y_2y_1')(t)} & t < x \\ \dfrac{y_1(x)y_2(t)}{(y_1y_2' - y_2y_1')(t)} & t > x \end{cases}$$

כאן מניחים ש- y_1, y_2 מקיימים את התנאיים $y_1(\alpha) = y_2(\beta) = 0$. הפונקציה $G(x,t)$ נקראת פונקציית הגרין לבעיית ערכי השפה.

פתרונות

1. (א) על ידי שיטת ווריאציית מקדמים הפתרון הוא $y = C_1x + C_2x^2$ כאשר

$$\begin{aligned} xC_1' + x^2C_2' &= 0 \\ C_1' + 2xC_2' &= x\ln x \end{aligned}$$

פתרון משוואות אלה הוא

$$C_1' = -x\ln x \ , \qquad C_2' = \ln x$$

ולכן

$$C_1 = -\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + K_1 \ , \qquad C_2 = x\ln x - x + K_2$$

ולכן

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}x^2 + K_1\right)x + \left(x\ln x - x + K_2\right)x^2 \\ &= \left(\frac{1}{2}x^3\ln x - \frac{3}{4}x^3\right) + (K_1+1)x + K_2x^2 \end{aligned}$$

(ב) על ידי שיטת ווריאציית מקדמים הפתרון הוא $y = C_1x + C_2x^2$ כאשר

$$\begin{aligned} C_1' + e^{x^2}C_2' &= 0 \\ 2xe^{x^2}C_2' &= x^4e^{x^2} \end{aligned}$$

פתרון משוואות אלה הוא

$$C_1' = -\frac{1}{2}x^3e^{x^2} \ , \qquad C_2' = \frac{1}{2}x^3$$

ולכן

$$C_1 = -\frac{1}{4}(x^2-1)e^{x^2} + K_1 \ , \qquad C_2 = \frac{1}{8}x^4 + K_2$$

ולכן

$$\begin{aligned} y &= \left(-\frac{1}{4}(x^2-1)e^{x^2} + K_1\right) + \left(\frac{1}{8}x^4 + K_2\right)e^{x^2} \\ &= \frac{1}{8}\left(x^4 - 2x^2 + 2\right)e^{x^2} + K_1 + K_2e^{x^2} \end{aligned}$$

(ג) לא לשכוח לחלק ב- x^2 לפני שמתחילים !
על ידי שיטת ווריאציית מקדמים הפתרון הוא $y = C_1y_1 + C_2y_2$ כאשר

$$\begin{aligned} xC_1' + x\ln|x|C_2' &= 0 \\ C_1' + (1+\ln|x|)C_2' &= 1 + \frac{1}{x} \end{aligned}$$

פתרון משוואות אלה הוא

$$C_1' = -\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln|x| \ , \qquad C_2' = 1+\frac{1}{x}$$

ולכן

$$C_1 = -x\ln|x| + x - \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + K_1 \ , \qquad C_2 = x + \ln|x| + K_2$$

ולכן

$$\begin{aligned} y &= \left(-x\ln|x| + x - \frac{1}{2}(\ln|x|)^2 + K_1\right)x + (x+\ln|x|+K_2)\,x\ln|x| \\ &= \left(x^2 + \frac{1}{2}x(\ln|x|)^2\right) + K_1 x + K_2 x\ln|x| \end{aligned}$$

2. הוורונסקיאן של y_1, y_2 הוא

$$\begin{aligned} W(y_1,y_2) &= y_1y_2' - y_2y_1' \\ &= e^{-ax}\sin kx\left(-ae^{-ax}\cos kx - ke^{-ax}\sin kx\right) \\ &\quad -e^{-ax}\cos kx\left(-ae^{-ax}\sin kx + ke^{-ax}\cos kx\right) \\ &= -ke^{-2ax} \end{aligned}$$

ניתן להשתמש בנוסחה 2 המופיעה למעלה. הפתרון הוא

$$y(x) = \int_0^x K(x,t)b(t)\ dt$$

כאשר פונקציית הגרין

$$K(x,t) = \frac{e^{-at}\sin kt\cdot e^{-ax}\cos kx - e^{-at}\cos kt\cdot e^{-ax}\sin kx}{-ke^{-2at}} = \frac{1}{k}e^{a(t-x)}\sin k(x-t)$$

נוסחה סופית:

$$y(x) = \frac{1}{k}\int_0^x e^{a(t-x)}\sin k(x-t)b(t)\ dt\ .$$

3. לא לשכוח לחלק ב- x^2 לפני שמתחילים!

(א) הוורונסקיאן הוא

$$W(y_1,y_2) = y_1y_2' - y_2y_1' = x\cdot 2x - x^2 = x^2$$

ניתן להשתמש בנוסחה 2 המופיעה למעלה. הפתרון הוא

$$y(x) = \int_a^x K(x,t)\frac{b(t)}{t^2}dt$$

כאשר

$$K(x,t) = \frac{t\cdot x^2 - t^2\cdot x}{t^2} = x\left(\frac{x}{t}-1\right)$$

נוסחה סופית:

$$y(x) = \int_a^x \frac{x}{t^2}\left(\frac{x}{t}-1\right)b(t)dt$$

(ב) לפי הרמז נעבוד בסעיף זה עם $y_1 = x(x-\alpha)$ ו- $y_2 = x(\beta - x)$, המקיימים $y_1(\alpha) = y_2(\beta) = 0$. הוורונסקיאן הוא עכשיו

$$W(y_1, y_2) = y_1 y_2' - y_2 y_1' = x(x-\alpha)(\beta - 2x) - x(\beta - x)(2x - \alpha) = x^2(\alpha - \beta)$$

לפי נוסחה 2 למעלה

$$y(x) = \int_\alpha^\beta G(x,t) \frac{b(t)}{t^2} \; dt$$

כאשר

$$G(x,t) = \begin{cases} \frac{tx(t-\alpha)(\beta-x)}{t^2(\alpha-\beta)} & t < x \\ \frac{tx(x-\alpha)(\beta-t)}{t^2(\alpha-\beta)} & t > x \end{cases} = \begin{cases} \frac{x(t-\alpha)(\beta-x)}{t(\alpha-\beta)} & t < x \\ \frac{x(x-\alpha)(\beta-t)}{t(\alpha-\beta)} & t > x \end{cases}$$

נוסיה סופית:

$$y(x) = -\frac{1}{\beta - \alpha} \left(x(\beta - x) \int_\alpha^x (t-\alpha) \frac{b(t)}{t^3} \; dt + x(x-\alpha) \int_x^\beta (\beta - t) \frac{b(t)}{t^3} \; dt \right)$$

4. <u>פתרון בסגנון של מה שלמדנו בשיעור:</u> נתונים:

$$y_1'' + a_1(x) y_1' + a_0(x) y_1 = 0 \; , \qquad y_1(\alpha) = 0$$

$$y_2'' + a_1(x) y_2' + a_0(x) y_2 = 0 \; , \qquad y_2'(\beta) = 0$$

רוצים לפתור

$$y'' + a_1(x) y' + a_0(x) y = b(x) \; , \qquad y(\alpha) = y'(\beta) = 0$$

כרגיל נחפש את הפתרון בצורה

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x)$$

ונדרוש

$$\begin{aligned} C_1' y_1 + C_2' y_2 &= 0 \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' &= b \end{aligned}$$

אם דורשים את האילוצים האלה אזי

$$\begin{aligned} y' &= C_1 y_1' + C_2 y_2' \\ y'' &= C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + b \end{aligned}$$

ו- y פותר את המשוואה הרלוונטית. כדי לקבל את תנאי השפה הרצויים יש לדרוש $C_2(\alpha) = C_1(\beta) = 0$. ולכן

$$C_1' = \frac{-b y_2}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \qquad \Rightarrow \qquad C_1(x) = \int_x^\beta \frac{b y_2}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \; dt$$

$$C_2' = \frac{b y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \qquad \Rightarrow \qquad C_2(x) = \int_\alpha^x \frac{b y_1}{y_1 y_2' - y_2 y_1'} \; dt$$

ו-

$$y(x)=\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2(x)b(t)}{(y_1y_2'-y_2y_1')(t)}\ dt+\int_x^\beta \frac{y_1(x)y_2(t)b(t)}{(y_1y_2'-y_2y_1')(t)}\ dt=\int_\alpha^\beta Q(x,t)b(t)dt$$

כאשר ל- $Q(x,t)$ יש את הצורה הרצויה.

<u>פתרון ישיר:</u> אם

$$y(x)=\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2(x)b(t)}{W(t)}dt+\int_x^\beta \frac{y_1(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt \qquad (*)$$

אזי

$$\begin{aligned} y'(x) &= \left(\frac{y_1(x)y_2(x)b(x)}{W(x)}+\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2'(x)b(t)}{W(t)}dt\right)+\left(-\frac{y_1(x)y_2(x)b(x)}{W(x)}+\int_x^\beta \frac{y_1'(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt\right) \\ &= \int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2'(x)b(t)}{W(t)}dt+\int_x^\beta \frac{y_1'(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt \qquad (**) \end{aligned}$$

באופן דומה

$$\begin{aligned} y''(x) &= \left(\frac{y_1(x)y_2'(x)b(x)}{W(x)}+\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2''(x)b(t)}{W(t)}dt\right)+\left(-\frac{y_1'(x)y_2(x)b(x)}{W(x)}+\int_x^\beta \frac{y_1''(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt\right) \\ &= b(x)+\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2''(x)b(t)}{W(t)}dt+\int_x^\beta \frac{y_1''(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt \end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned} y''(x)+a_1(x)y'(x)+a_0(x)y(x) &= b(x)+\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2''(x)b(t)}{W(t)}dt+\int_x^\beta \frac{y_1''(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt \\ &\quad +a_1(x)\left(\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2'(x)b(t)}{W(t)}dt+\int_x^\beta \frac{y_1'(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt\right) \\ &\quad +a_0(x)\left(\int_\alpha^x \frac{y_1(t)y_2(x)b(t)}{W(t)}dt+\int_x^\beta \frac{y_1(x)y_2(t)b(t)}{W(t)}dt\right) \\ &= b(x) \\ &\quad +\int_\alpha^x \left(y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_0(x)y_2(x)\right)\frac{y_1(t)b(t)}{W(t)}dt \\ &\quad +\int_x^\beta \left(y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_0(x)y_1(x)\right)\frac{y_2(t)b(t)}{W(t)}dt \\ &= b(x) \end{aligned}$$

היות ו- y_1,y_2 הם פתרונות של המשוואה ההומוגנית. ולכן $y(x)$ מקיים את המשוואה האי הומוגנית. כדי לבדוק ש- $y(x)$ מקיים את תנאיי השפה הרצויים יש להציב $x=\alpha$ במשוואה $(*)$ ו- $x=\beta$ במשוואה $(**)$ ולזכור ש- $y_1(\alpha)=y_2'(\beta)=0$.