פתרון תרגיל 7 מבוא לתורת החבורות תשע"ט

שאלה 1. תהי S_n חבורת התמורות.

מצאו את תת החבורה ב S_7 הנוצרת ע"י התמורה: $(4537)(126)$. שימו לב שזוהי חבורה ציקלית.

פתרון.

$$\langle (123)(57)\rangle = \{(123)(57),(132),(57),(123),(132)(57),id\}$$

שאלה 2. מצאו העתקות לפי התנאים הנתונים:

א. מצאו שיכון $f : S_4 \to S_6$.

ב. מצאו שיכון $f : S_5 \hookrightarrow S_6$ עבורו $f((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) \neq (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$.

פתרון. א. אנו יכולים לראות את S_n כתת־חבורה של S_{n+1} לפי השיכון הסטנדרטי, השולח תמורה σ של n איברים לתמורה $\hat{\sigma}$ של $n+1$ איברים לפי $\hat{\sigma}(i) = \sigma(i)$ לכל $1 \leq i \leq n$ ומקבע את האיבר האחרון $\hat{\sigma}(n+1) = n+1$. לפי נקודת מבט זו, פשוט נבחר את השיכון $\sigma \mapsto \sigma$, כאשר המספרים $5,6$ נשלחים לעצמם. קל לראות שזה אכן שיכון (למעשה מצאנו תת־חבורה של S_6 שאיזומורפית ל-S_4).

ב. בדומה לסעיף הקודם, הפעם אפשר לבחור להעביר את $\sigma \in S_5$ לתמורה ב-$S_{\{2,\ldots,6\}}$, וזו חבורה המשוכנת ב-S_6. כלומר נגדיר $f : S_5 \to S_6$ לפי זה ש-σ תעבור לתמורה $f(\sigma)(i) = \sigma(i-1)+1$ עבור $2 \leq i \leq 6$ ועבור $i = 1$, $f(\sigma)(1) = 1$. בפרט $f((1\ 2\ 3\ 4\ 5)) = (2\ 3\ 4\ 5\ 6)$.
באופן יותר כללי אפשר להפעיל אוטומורפיזם של S_5 שלא מקבע את $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, ואז לשכן את התוצאה ב-S_6. אפשר גם לשכן את S_5 ב-S_6 באופן הטבעי כמו בסעיף הקודם ואז להפעיל אוטומורפיזם של S_6 שלא מקבע את $(1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, וסה"כ ההרכבה של שתי הפונקציות (השיכון והאוטומורפיזם) היא שיכון מתאים. באיזה מן הדרכים יש לנו יותר אפשרויות?

שאלה 3. לכל תמורה σ מהתמורות הבאות, כתבו את σ כמכפלת מחזורים זרים, וחשבו את σ^2:

א. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 2 & 9 & 7 & 1 & 6 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ ב-S_9.

ב. $(1\ 5)(3\ 1\ 4)(2\ 5\ 4)(1\ 2)$ ב-S_5.

פתרון.

א. נסמן את התמורה הנתונה σ. מפרקים לפי הדרך שראינו בתרגול. מקבלים כי יש את המעגלים הבאים:

$$1 \mapsto 5 \mapsto 1,\ 3 \mapsto 9 \mapsto 8 \mapsto 3,\ 4 \mapsto 7 \mapsto 4$$

לכן $\sigma = (1\ 5)\,(3\ 9\ 8)\,(4\ 7)$ (2 ו-6 נשלחים כל אחד לעצמו).
נחשב את σ^2 כיוון שמחזורים זרים מתחלפים זה עם זה, נקבל:

$$\sigma^2 = (1\ 5)^2\,(3\ 9\ 8)^2\,(4\ 7)^2 = (3\ 8\ 9)$$

ב. נסמן את התמורה הנתונה σ. פה התמורה בכלל לא נתונה בצורה נוחה; אם בודקים איבר-איבר לאן כל אחד נשלח, מקבלים:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן קל לראות שיש פה מעגל אחד, כלומר $\sigma = (1\ 4\ 3\ 2\ 5)$. נחשב את σ^2:

$$\sigma^2 = (1\ 4\ 3\ 2\ 5)^2 = (1\ 3\ 5\ 4\ 2)$$