

תרגיל: האם $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$?

פתרון:

לפי תרגיל 2 בדף המצורף, מספיק לבדוק את השאלה על הקואורדינטות של הוקטורים מעל בסיס כלשהו. נבחר כמובן את הבסיס הסטנדרטי למטריצות:

$$S = \{E_{ij}\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix}_S = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \text{ ולכן}$$

לפיכך השאלה שקולה לשאלה האם $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$?

ולמדנו שזהו שאלה שקולה לשאלה האם קיים פתרון למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

קיבלנו שורת סתירה, לכן אין פתרון ולכן הוקטור אינו נדרג

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 6 \end{array} \right)$$

נפרש על ידי שלושת הוקטורים האחרים ולכן המטריצה אינה נפרשת על ידי שלושת המטריצות האחרות.