פתרון מבחן מועד ג – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 31/05/18

מרצה: דר' ארז שיינר   משך המבחן: שלוש שעות   חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק'   ענו על כל השאלות   כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\left(5x^3\right)e^{x^2-1}}{\left(1-\cos\left(x\right)\right)^3}$

$$\lim_{x\to 0}\left(\underbrace{\frac{\sin(5x^3)}{5x^3}}_{\to 1}\right)^2\cdot\underbrace{e^{x^2-1}}_{\to e^{-1}}\cdot\left(\underbrace{\frac{x^2}{1-\cos(x)}}_{\to 2}\right)^3\cdot 25=1^2\cdot e^{-1}\cdot 2^3\cdot 25=\frac{200}{e}$$

ב. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+1}-\ln(x)\right)$

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x+1}\left(1-\frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}\right)=\{\infty(1-0\cdot 1)\}=\infty$$

ג. $\lim_{n\to\infty}\frac{e^{n!}}{n!}$

ידוע לפי סדרי גודל כי

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x}=\infty$$

נציב לפי היינה את הסדרה $a_n=n!\to\infty$ בפונקציה ונקבל כי

$$\frac{e^{n!}}{n!}\to\infty$$

2.

א. חשבו את $\int\frac{1}{\arctan(x)+x^2\cdot\arctan(x)}dx$.

$$\int\frac{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)}{\arctan(x)}dx=\ln|\arctan(x)|+C$$

(נגזרת חלקי הפונקציה)

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{x+1}{x^3-1}dx$.

יש כאן שתי נקודות בעייתיות ולכן נפצל

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^3-1} + \int_2^\infty \frac{x+1}{x^3-1}$$

נתחיל מהאינטגרל השמאלי, ונזיז את הנקודה הבעייתית לאפס ע"י הצבה

$$\int_1^2 \frac{x+1}{x^3-1}dx = \begin{Bmatrix} t = x-1 \\ dt = dx \end{Bmatrix} = \int_0^1 \frac{t+2}{(t+1)^3-1}dt = \int_0^1 \frac{t+2}{t^3+3t^2+3t}dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{t}\cdot\frac{t+2}{t^2+3t+3}dt$$

נעשה מבחן השוואה גבולי בין האינטגרל החיובי הזה לבין $\int_0^1 \frac{1}{t}dt$

$$\lim_{t\to 0}\frac{\frac{1}{t}\cdot\frac{t+2}{t^2+3t+3}}{\frac{1}{t}} = \frac{2}{3}$$

לכן הם חברים, וגם האינטגרל שלנו מתבדר!

כיוון האינטגרל התבדר באחד התחומים אין צורך להמשיך עם התרגיל, והאינטגרל כולו נחשב מתבדר.

למרות זאת, בשביל היופי של המשחק, נבדוק גם את ההתכנסות של התחום השני.

$$\int_2^\infty \frac{x+1}{x^3-1}dx$$

נשווה עם האינטגרל $\int_2^\infty \frac{1}{x^2}dx$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+1}{x^3-1}\cdot x^2 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3}\cdot\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x^3}} = 1$$

לכן האינטגרלים החיוביים חברים, וגם האינטגרל בתחום הזה מתכנס.

אבל שוב – האינטגרל כולו בקטע $[1,\infty)$ מתבדר.

3. הוכיחו כי לכל $0 < a \in \mathbb{R}$ <u>קיים</u> פתרון <u>יחיד</u> למשוואה $\ln\left(e^x+1\right)=a$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = \ln(e^x + 1) - a$$

$$h'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} > 0$$

לכן הפונקציה עולה בכל הממשיים, ולכן אם קיים שורש הוא יחיד.

כעת

$$\lim_{x\to\infty} \ln(e^x + 1) - a = \infty$$

ולכן קיימת נקודה x_2 כך ש $h(x_2) > 0$

כמו כן

$$\lim_{x\to-\infty} \ln(e^x + 1) - a = -a < 0$$

כלומר קיימת נקודה x_1 כך ש $h(x_1) < 0$

כיוון שהפונקציה רציפה כצירוף רציפות, לפי ערך הביניים הוא חותכת את הציר בין x_1, x_2 ולכן יש פתרון ולפי ההוכחה למעלה הוא יחיד.

4. תהי פונקציה f גזירה ב $\mathbb{R}$, כך ש $f(f(x)) = f(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

פתרון מלא לגרסא מאתגרת יותר של השאלה נמצא בחוברת [בקישור הבא](), שאלות 44-45.

א. הוכיחו שקיימת נקודה עבורה $f'(x)=0$ או קיימת נקודה עבורה $f'(x)=1$.

נגזור את שני הצדדים

$$f'\big(f(x)\big) \cdot f'(x) = f'(x)$$

$$f'(x)\Big(f'\big(f(x)\big) - 1\Big) = 0$$

אם קיימת נקודה c עבורה $f'(c) = 0$ סיימנו.

אחרת, לכל c מתקיים כי $f'(c) \neq 0$.

נציב למשל $c = 0$ ונקבל

$$f'(0)\Big(f'\big(f(0)\big) - 1\Big) = 0$$

מותר לחלק ב$f'(0)$ כי תמיד הנגזרת שונה מאפס במקרה זה ונקבל כי

$$f'\big(f(0)\big) = 1$$

ואז אכן בנקודה $x = f(0)$ מתקיים כי $f'(x) = 1$

ב. הוכיחו שאם $f(0) \neq 0$ קיימת נקודה עבורה $f'(x) = 0$.

$$f\big(f(0)\big) = f(0)$$

כיוון ש $f(0) \neq 0$ וערך הפונקציה f שווה בשתי הנקודות הללו.

ולכן לפי משפט רול, כיוון ש f רציפה בקטע הסגור וגזירה בפתוח (כי היא היא גזירה תמיד) נובע כי קיימת נקודה בה $f'(x) = 0$.

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = \dfrac{a_n^2}{n} + a_n + n$.

נוסח העשרה לשאלה: הוכיחו כי הסדרה חיובית החל משלב מסויים.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n^2}{n} + n \geq 0$$

ב. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

<u>אם</u> הסדרה חסומה, כיוון שהיא עולה היא מתכנסת לגבול סופי נסמנו $a_n \to L$

נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1} = \lim \frac{a_n^2}{n} + a_n + n$$

$$\lim \frac{a_n^2}{n} + a_n + n = \left\{\frac{L^2}{\infty} + L + \infty\right\} = \infty$$

ולכן

$$L = \infty$$

סתירה.

לכן הסדרה אינה חסומה ומתקיים כי $a_n \to \infty$ כי היא עולה.

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{1}{n^2} \cdot \dfrac{k^3}{k^2 + 3nk + 2n^2} \right)$.

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{\left(\frac{k}{n}\right)^3}{\left(\frac{k}{n}\right)^2 + 3\frac{k}{n} + 2}$$

סה"כ מדובר בסדרת סכומי רימן של הפונקציה $f(x) = \frac{x^3}{x^2+3x+2}$

הפעם לא ברור לי שהפונקציה רציפה ב$[0,1]$, נבדוק את המכנה

$$f(x) = \frac{x^3}{(x+1)(x+2)}$$

אכן הפונקציה רציפה ב$[0,1]$

נחזור לסכומי הרימן - בחירת הנקודות $\left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, 1\right\}$

לכן לפי משפט שלמדנו בכיתה (משפט חשוב)

$$a_n \to \int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)(x+2)} dx$$

ראשית נבצע חילוק פולינומים

$$\begin{array}{l} x-3 \\ -- \\ x^3 \;\; | \; x^2+3x+2 \\ x^3+3x^2+2x \\ -------- \\ \quad -3x^2-2x \\ \quad -3x^2-9x-6 \\ \quad --------- \\ \qquad 7x+6 \end{array}$$

$$\frac{x^3}{(x+1)(x+2)} = x - 3 + \frac{7x+6}{(x+1)(x+2)}$$

כעת נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{7x+6}{(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$$

$$7x + 6 = A(x+2) + B(x+1)$$

נציב $x = -1$

$$-1 = A$$

נציב $x = -2$

$$-8 = -B \to B = 8$$

$$\frac{x^3}{(x+1)(x+2)} = x - 3 + \frac{8}{x+2} - \frac{1}{x+1}$$

$$\int \frac{x^3}{(x+1)(x+2)}dx = \int \left(x-3+\frac{8}{x+2}-\frac{1}{x+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}-3x+8\ln|x+2|-\ln|x+1|+C$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{(x+1)(x+2)}dx = \frac{1}{2}-3+8\ln(3)-\ln(2)-8\ln(2)$$

ב. קרבו את $\sqrt{8}$ באמצעות הפונקציה $f(x)=\sqrt{9+x}$ עד כדי $h=\frac{1}{100}$.

הנקודה הרצוייה היא $x=-1$

והנקודה המצויים היא $x_0=0$

ננחש $n=3$

$$f(x)=\sqrt{9+x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{9+x}}=\frac{1}{2}\cdot(9+x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$f''(x)=-\frac{1}{4}(9+x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$f'''(x)=\frac{3}{8}(9+x)^{-\frac{5}{2}}$$

$$f''''(x)=-\frac{15}{16}(9+x)^{-\frac{7}{2}}$$

לפי לגראנז' קיימת נקודה $-1<c<0$ כך ש

$$R_3=\frac{-\frac{15}{16}(9+c)^{-\frac{7}{2}}}{4!}(-1-0)^4$$

$$|R_3|=\frac{15}{16\cdot 24}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{9+c}\right)^7} \underset{\substack{\text{נקטין את המכנה}\\ \text{נגדיל את הביטוי}}}{\lesssim} \frac{5}{128}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{8}\right)^7}<\frac{5}{128}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{8}\right)^6}=\frac{5}{2^{16}}<\frac{1}{100}$$

נרשום את פולינום הטיילור

$$P_3(x)=3+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{9}}\cdot x-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{9}\right)^3}\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{\left(\sqrt{9}\right)^5}\cdot\frac{1}{3!}\cdot x^3$$

נציב $x=-1$

$$\sqrt{8}=f(-1)\approx P_3(-1)=3-\frac{1}{6}-\frac{1}{8\cdot 3^3}-\frac{1}{16\cdot 3^5}$$