

מבחן בקורס מבנים אלגבריים להנדסה 83-218

מועד א', סמסטר קיץ תשע"ז

מטרה: תומר באואר
מתרגלת: עדי בן צבי
משך המבחן: שעתיים וחצי
הוראות: יש לענות על 4 שאלות מתוך חמש השאלות הראשונות, ובנוסף יש שאלת בונוס. סמנו באופן ברור בראש כל עמוד לאיזו שאלה הוא מתייחס, ונא לא לפתור סעיפים משאלות שונות באותו עמוד.
חומר עזר: אין, גם לא מחשבון.

שאלה 1. תהינה G, H חבורות.

1. (9 נק') הוכיחו או הפריכו: אם G, H הן ציקליות, אז $G \times H$ ציקלית.

2. (8 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $G \times H$ אבלית, אז G, H הן אבליות.

3. (8 נק') הוכיחו או הפריכו: אם $|G| = |H| = 6$, אז $G \cong H$.

שאלה 2. תהי G חבורה. הגדרנו שהמרכז של G הוא הקבוצה

$$Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G, gh = hg\}$$

1. (15 נק') הוכיחו כי $Z(G) \triangleleft G$. יש להוכיח שהיא תת-חבורה ושהיא נורמלית.

2. (10 נק') הוכיחו כי $Z(Z(G)) = Z(G)$.

שאלה 3. יהי R חוג, ויהיו $I, J \triangleleft R$ אידאלים.

1. (13 נק') הוכיחו או הפריכו: תמיד מתקיים $I \cap J \triangleleft R$.

2. (12 נק') הוכיחו או הפריכו: תמיד מתקיים $I \cup J \triangleleft R$.

שאלה 4. יהי F שדה ויהי $f(x) \in F[x]$. נגדיר כי $a \in F$ הוא שורש של $f(x)$ אם $f(a) = 0$.

1. (10 נק') הוכיחו כי a הוא שורש של $f(x)$ אם ורק אם $(x - a) \mid f(x)$.
רמז: בכיוון הקשה העזרו בחלוקה אוקלידית.

2. (10 נק') נניח כי $f(x)$ הוא פריק ומקיים $\deg f(x) \leq 3$. הוכיחו שיש לו שורש ב- F .
רמז: העזרו בסעיף הראשון.

3. (5 נק') הפריכו, בעזרת דוגמה נגדית, את הסעיף השני כאשר $\deg f(x) > 3$ ו- F סופי.

שאלה 5. הזכרו כי \mathbb{F}_{27} מציין את השדה בן 27 איברים.

1. (15 נק') בנו באופן מפורש את \mathbb{F}_{27} כמנה של חוג הפולינומים $\mathbb{F}_3[x]$.

2. (10 נק') הוכיחו שכל איבר של \mathbb{F}_{27} הוא שורש של הפולינום $x^{27} - x$.
רמז: אפשר להעזר במסקנה ממשפט לגראנז'.

שאלת בונוס (7 נק') יהיו $n, m, r \in \mathbb{N}$. הוכיחו (בקצרה!) בעזרת משפט מהקורס כי

$$n! \cdot m! \cdot r! \mid (n + m + r)!$$

בהצלחה!