...

מרחבי כיסוי

מרחב כיסוי הוא שלשה $[E,B,p]$, B,E מ"ט ו$p:E\to B$ העתקה שמקיימת:

א. p היא <u>על</u>.

ב. לכל $b\in B$ יש סביבה U כך ש$p^{-1}(U)$ היא איחוד זר $p^{-1}(U)=\biguplus V_\alpha$ של קבוצות פתוחות V_α כך שלכל α, $p|_{V_\alpha}:V_\alpha\to U$ היא הומאומורפיזם.

סביבה U כזו נקראת מכוסה יפה.

דוגמה

$B=S^1$, $E=\mathbb{R}$, $p:E\to B$ מוגדר ע"י $p(t):=e^{2\pi it}$.

משפט

תהי $\gamma:I\to B$ מסילה. נסמן $b=\gamma(0)$. ותהי $e\in\rho^{-1}(b)$. אזי קיימת $\hat{\gamma}$ יחידה כך ש:

א. $p\circ\hat{\gamma}=\gamma$

ב. $\hat{\gamma}(0)=e$

$\hat{\gamma}$ כזאת נקראת <u>הרמה</u> של γ, המתחילה בe.

הוכחה

לכל $b\in B$ יש U_b סביבה של b המכוסה יפה. הקבוצות $\left\{\gamma^{-1}(U_b)\right\}_{b\in B}$ הן כיסוי פתוח של I.

I הוא מרחב מטרי קומפקטי. לכן עבור כיסוי זה יש מספר לבג $\delta>0$.

לכן יש N מספיק גדול כך שאם נחלק את I לN קטעים באורך $\frac{1}{N}$, $I_1,I_2,\ldots I_N$

אז לכל $1\le i\le N$ I_n מוכל באחת מקבוצות הכיסוי $\left\{\gamma^{-1}(U_b)\right\}$ - כלומר יש b כך ש$I_i\subseteq\gamma^{-1}(U_b)$, כלומר $\gamma(I_i)\subseteq U_b$.

נגדיר את ההרמה $\hat{\gamma}$ על I_1 ואחרי כן על I_2 וכן הלאה עד שתוגדר על כל I. נראה שבכל שלב אפשר לבצע את ההרחבה, ורק באופן אחד, ולכן בסופו של דבר נקבל קיום ויחידות של ההרחבה.

יש X_n כך ש$\gamma(I_1)\subseteq U_{X_1}$. קיימת V_1 אחת מן הקבוצות הפתוחות בכיסוי היפה של U_{X_1} שבה נמצא e. נגדיר את $\hat{\gamma}$ על I_1 ע"י $\left(p|_{V_1}\right)^{-1}\circ\gamma|_{I_1}$.

את $\gamma|_{I_2}$ נרים בדיוק באותו אופן עם נקודת התחלה $\hat{\gamma}\left(\frac{1}{N}\right)$.

סימון

את ההרמה היחידה של γ המתחילה בe נסמן $\hat{\gamma}^e$.

משפט

אם $\delta \underset{\partial I}{\sim} \gamma$ ונסמן $L = \gamma(0) = \delta(0)$ ונבחר $e \in p^{-1}(b)$, אזי $\hat{\gamma}^e(1) = \hat{\delta}^e(1)$.

הערה: זה נכון רק לגבי העתקות הומאוטופיות ביחס לקצוות - **ולא** עבור כל שתי העתקות המתחילות ומסתיימות באותה נקודה.

אם למשל γ ו-δ הן על אותו מעגל, אבל בכיוונים הפוכים, אז ההרמה שלהם בספירלה יכולה לגרום להם להסתיים בנקודות שונות - אמנם אחת מעל השנייה, אבל עדיין נקודות שונות.

הוכחה

קיימת הרמה של H, $\widehat{H} : I \times I \to E$, כך ש-$\widehat{H}(0,0) = e$ ($\widehat{H}$ הרמה פרושו ש-$H = p \circ \widehat{H}$).