מערך תרגול 13 מופשטת 3

תזכורת 13.1 נגדיר פולינום ציקלוטומי לפי

$$\prod_{d|n}\Phi_d = x^n - 1$$

Φ_n הוא פולינום מדרגה $\varphi(n)$ והוא הפולינום המינימלי של ρ_n - שורש n פרימיטיבי של 1. בנוסף

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho_n)/\mathbb{Q}) \cong U_n$$

חבורת אוילר של n.

תרגיל 13.2 חשבו את Φ_{15}.

פתרון:

$$\Phi_1 = x - 1$$

$$\Phi_3 = \frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$$

$$\Phi_5 = \frac{x^5-1}{x-1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

$$\Phi_{15} = \frac{x^{15}-1}{\Phi_1\Phi_3\Phi_5} = \frac{x^{15}-1}{(x^5-1)\Phi_3} = \frac{x^{10}+x^5+1}{\Phi_3} = x^8 - x^7 + x^5 - x^4 + x^3 - x + 1$$

תרגיל 13.3 האם ניתן לבנות את המספר $e^{\frac{2\pi i}{15}}$?

פתרון: כן. $\varphi(15) = 8$ שזו חזקה של 2 (ולכן חבורת גלואה היא מסדר 2^k)

תרגיל 13.4 האם ניתן לחלק זוית ל5?

פתרון: לא. למרות שכן ניתן לבנות את הזוית $e^{\frac{2\pi i}{5}}$ כפי שראינו שיעור שעבר. אם היה ניתן לחלק זוית ל5, היה אפשר גם לבנות את $e^{\frac{2\pi i}{25}}$ ובמקרה הזה

$$\varphi(25) = 20$$

שזה אינו חזקה של 2.

תרגיל 13.5 בנה במפורש מצולע 5 משוכלל.

פתרון: כבר ראינו בתרגיל בית שזו הרחבה ממימד 4 עם שדה ביניים

$$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}(\rho+\rho^4) \subseteq \mathbb{Q}(\rho)$$

כאשר $\rho = e^{\frac{2\pi i}{5}}$. מה הפולינום המינימלי של $\rho+\rho^4$? $\varphi_2 : \rho \to \rho^2$ הוא יוצר של חבורת גלואה

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_4$$

אבל

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho+\rho^4)/\mathbb{Q}) \cong \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q})/\,\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}(\mathbb{Q}(\rho+\rho^4)))$$

ולכן הוא גם יוצר את

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho+\rho^4)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Z}_2$$

ולכן הפולינום המינימלי הוא

$$\begin{aligned}(x-(\rho+\rho^4))(x-\varphi_2(\rho+\rho^4)) &= (x-(\rho+\rho^4))(x-(\rho^2+\rho^3)) \\ &= x^2+x-1\end{aligned}$$

ולכן

$$\rho+\rho^4 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

מסתבר ש

$$\mathbb{Q}(\rho+\rho^4) = \mathbb{Q}(\sqrt{5})$$

ואנחנו יודעים לבנות את זה. כעת ננסה להבין מה הפולינום המינימלי של ρ מעל $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$.

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\rho)/\mathbb{Q}(\mathbb{Q}(\rho+\rho^4)) \cong \mathbb{Z}_2$$

שנוצר על ידי

$$(\varphi_2)^2 = \varphi_4$$

כלומר

$$(x-\rho)(x-\rho^4) = x^2 + \frac{1-\sqrt{5}}{2}x + 1$$

אם נסמן $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ אז

$$\rho = \frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4}}{2}$$

וזאת בניה "מפורשת".

תרגיל 13.6 קיימת הרחבת גלואה E/F עם חבורת גלואה S_n.

פתרון: נסתכל על השדה $\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)$. S_n היא בטח תת חבורה של חבורת גלואה לפי הפעולה הטבעית

$$\pi x_i = x_{\pi(i)}$$

לכן צריך להיות שדה שבת

$$K = \mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^{S_n}$$

ו

$$E/K$$

הרחבת גלואה. כעת,

$$\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)/\mathbb{Q}(x_1, \dots, x_n)^{S_n}) \cong S_n$$

תרגיל 13.7 יהיו $g(x), h(x)$ פולינומים ספרבילים מעל F עם שדות פיצול K, L כך ש $K \cap L = F$. הוכיחו כי

$$\mathrm{Gal}(K \cdot L/F) \cong \mathrm{Gal}(K/F) \times \mathrm{Gal}(L/F)$$

פתרון: היות ש K/F ו L/F, הן הרחבות גלואה, אנחנו יודעים ש $H_1 = \mathrm{Gal}(K \cdot L/L)$ ו $H_2 = \mathrm{Gal}(K \cdot L/K)$ הן תתי חבורות נורמליות של $G = \mathrm{Gal}(K \cdot L/F)$. כמו כן, לפי התאמת גלואה,

$$(K \cdot L)^{H_1 H_2} = (K \cdot L)^{H_1} \cap (K \cdot L)^{H_2} = K \cap L = F = E^G$$

ולכן

$$H_1 H_2 = G$$

וכמו כן

$$(K \cdot L)^{H_1 \cap H_2} = (K \cdot L)^{H_1} \cdot (K \cdot L)^{H_2} = K \cdot L = (K \cdot L)^{\{1\}}$$

ולכן

$$H_1 \cap H_2 = \{1\}$$

וזו בדיוק ההגדרה של מכפלה ישרה, כלומר

$$G = H_1 \times H_2$$

לכן

$$\mathrm{Gal}(K\cdot L/F)\cong \mathrm{Gal}(K\cdot L/L)\times \mathrm{Gal}(K\cdot L/K)$$

עכשיו נשים לב שלפי משפט האיזומורפיזם השני

$$\mathrm{Gal}(K\cdot L/L)\cong \mathrm{Gal}(K/F)$$

$$\mathrm{Gal}(K\cdot L/K)\cong \mathrm{Gal}(L/F)$$

ובזה סיימנו.