תבניות דיפרנציאליות

התאוריה של תבניות דיפרנציאליות פותחה בכדי לתאר באופן אלגנטי את התוצאות המרכזיות באנליזה וקטורית - המראות שיוויון בין אינטגרלים שונים.

המשפטים שנוכיח יראו "שונים" למראית עין אך למעשה נראים להכללה יחידה.

בשפה של תבניות דיפרנציאליות נוכל להראות כי מאחורי כולם מסתתר עקרון מתמטי יחיד.

תבניות דיפרנציאליות מופיעות באנליזה כאינטגרנדים

$$\iiint \underbrace{7\,dx\,dy\,dz}_{\Downarrow} \qquad \iint \underbrace{r\,dr\,d\theta}_{\Downarrow} \qquad \int \underbrace{x^2dx}_{\Downarrow}$$

3-תבנית   2-תבנית   1-תבנית

תחילה נגדיר אותן כביטויים פורמליים ונכיר את הפעולות המוגדרות עליהן:

0-תבניות דיפרנציאליות ב-$\mathbb{R}^3$ - פונקציה $f:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$

דוגמה: $f(x,y,z)=e^x y^2$

1-תבנית דיפרנציאלית ב-$\mathbb{R}^3$: ביטויים מהצורה $M\,dx+N\,dy+Q\,dz$

כאשר M,N,Q פונקציות (0-תבניות)

דוגמה: $\omega = x^2dx+\sin z\,dy+7dz$

2-תבניות דיפרנציאליות ב-$\mathbb{R}^3$ - ביטויים מהצורה $A\,dx\wedge dy+B\,dy\wedge dz+C\,dz\wedge dx$

כאשר A,B,C פונקציות. * חשוב לשמור על סדר ציקלי ב-2-תבניות הבסיסיות

$$dx \to dy \to dz \to dx$$

3-תבניות דיפרנציאליות ב-$\mathbb{R}^3$ - ביטויים מהצורה $G\,dx\wedge dy\wedge dz$, G פונקציה

אוסף כל התבניות הדיפרנציאליות מסדר K של $\mathbb{R}^3$ מסומן $\Omega^K(\mathbb{R}^3)$

באופן טבעי ניתן לחבר 2 תבניות מאותו הסדר

$$(x^2dx+7\sin z\,dy+e^x dz)+(6y\,dx-3dy)=((x^2+6y)dx+(7\sin z-3)dy+e^x dz)$$

ולהכפיל כל k-תבנית ב-0-תבנית: $xy^7(6y\,dx-3dy)=6xy^7dx-3xy^7dy$

בנוסף ניתן לעבוד בפעולת כפל **wedge** בין תבניות מסדר k ו-m לקבלת תבניות חדשה מסדר k+m:

$$\Omega^k(\mathbb{R}^3)\times\Omega^m(\mathbb{R}^3)\xrightarrow{\wedge}\Omega^{k+m}(\mathbb{R}^3)$$

תכונות: דיסטריבוטיביות (אפשר לפתוח סוגריים באופן "טבעי")

אסוציאטיביות

אנטי סימטריות - $\omega\wedge\eta=(-1)^{km}\eta\wedge\omega$

מסקנות:

(1) בהחלפת סדר של 2 1-תבניות dx,dy,dz בכפל wedge יש להוסיף -

דוגמאות: $dx\wedge dy\wedge dz=-dx\wedge dz\wedge dy=dz\wedge dx\wedge dy$, $dx\wedge dy=-dy\wedge dx$

(2) כאשר אותה 1-תבנית dx, dy או dz חוזרת על עצמה תוצאת ה Wedge $=0$

דוגמא: $dx\wedge dy\wedge dx=0$

תרגול - נתון $\begin{cases}\omega=x^2dz\\ \eta=\sin x\,dx+xy\,dy+dz\end{cases}$ חשב $\omega\wedge\eta$

פתרון:

$$\omega\wedge\eta=(x^2dz)\wedge(\sin x\,dx+xy\,dy+dz)=x^2\sin x\,dz\wedge dx$$

$$x^2\sin x\,dz\wedge dx+x^3y\underbrace{dz\wedge dy}_{=-dy\wedge dz}+x^2\underbrace{dz\wedge dz}_{=0}=(x^2\sin x\,dz\wedge dx-x^3y\,dy\wedge dz$$

תרגול: נתון $\omega=xy\,dy\wedge dz$

$\begin{cases}\omega=xy\,dy\wedge dz+x^2dx\wedge dy\\ \eta=dx+dz\end{cases}$ חשב $\omega\wedge\eta$

פתרון:

$$\omega\wedge\eta=(xy\,dy\wedge dz+x^2dx\wedge dy)\wedge(dx+dz)$$

$$xy\,dy\wedge dz\wedge dx+x^2\underbrace{dx\wedge dy\wedge dx}_{=0}+xy\underbrace{dy\wedge dz\wedge dz}_{=0}+x^2dx\wedge dy\wedge dz$$

$$-xy\,dy\wedge dx\wedge dz+x^2dx\wedge dy\wedge dz=xy\,dx\wedge dy\wedge dz+x^2dx\wedge dy\wedge dz$$

$$=(x^2+xy)\,dx\wedge dy\wedge dz$$

אוסף כל ה-k תבניות דיפרנציאליות מכל הדרגות עם פעולות החיבור וה-wedge נקרא אלגברה חיצונית.

נגזרת חיצונית - $d: \Omega^k(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^{k+1}(\mathbb{R}^3)$

התאמה בין k-תבניות ל $(k+1)$ תבניות.

d על 0-תבניות: $d: \Omega^0(\mathbb{R}^3) \longrightarrow \Omega^1(\mathbb{R}^3)$

$$f \longrightarrow df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial f}{\partial z}dz$$

מתאים ל-f את הדיפרנציאל השלם df.

לכל k-תבנית מהצורה $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ נגדיר את d ע"י
$$d(f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n) = df \wedge dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$$

ההגדרה לכל-תבנית כללית נובעת מלינאריות $d(\omega_1 + \omega_2) = d(\omega_1) + d(\omega_2)$

דוגמא: נתונה $\omega = y^2\cos x\, dy + xy\, dx + dz$ חשב $d\omega = ?$

$$d\omega = d(y^2\cos x\, dy) + d(xy\, dx) + d(dz)$$
$$= d(y^2\cos x) \wedge dy + d(xy) \wedge dx + d(1) \wedge dz$$
$$= (-\sin x\, y^2 dx + 2y\cos x\, dy) \wedge dy + (y dx + x dy) \wedge dx + (0dx + 0dy) \wedge dz$$
$$= -\sin x\, y^2 dx \wedge dy + 2y\cos x \underbrace{dy \wedge dy}_{0} + y \underbrace{dx \wedge dx}_{0} + x\, dy \wedge dx + 0 \wedge dz$$
$$= -\sin x\, y^2 dx \wedge dy - x\, dx \wedge dy + \underbrace{0dz}_{0} = (-\sin x\, y^2 - x) dx \wedge dy$$