<u>הערות לתרגיל מס' 1:</u>

1. גבולות חשובים מאוד – יש לזכור אותם בע"פ. ההוכחה אליהם - דרך כלל לופיטל[1]:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{kx}=0$

הוכחה[2]: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{kx}=im_{x\to 0}\frac{k\cdot\sin kx}{k}=\frac{k\cdot 0}{k}=0$

2. $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{(kx)^2}=\frac{1}{2}$

הוכחה: $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos kx}{(kx)^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k\sin kx}{2k^2x}=\lim_{x\to 0}\frac{k^2\cos kx}{2k^2}=\frac{1}{2}$

3. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{kx}=1$

הוכחה: $\lim_{x\to 0}\frac{e^{kx}-1}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{ke^{kx}}{k}=e^0=1$

4. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=1$

הוכחה: $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{k\cos kx}{k}=\frac{k\cdot 1}{k}=1$

5. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{kx}=1$

הוכחה: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan kx}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{k\cdot\frac{1}{\cos^2 kx}}{k}=\frac{k}{k\cos^2 kx}=\frac{k}{k\cdot 1^2}=1$

6. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(kx+1)}{kx}=1$

הוכחה: $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(kx+1)}{kx}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{k}{kx+1}}{k}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{k(kx+1)}=\frac{k}{k\cdot 1}=1$

<u>הערה חשובה</u>: כאשר ישנו ביטוי שבתוכו הגבול $\lim_{x\to 0}1-\cos x$ **, <u>אסור</u>** להכפיל ולחלק ב- x, מכיוון שאז אני מכפיל ומחלק ב-0 (לפי כלל 1 לעיל), ולכן חייב במקרה שכזה להכפיל ולחלק ב- x^2 (כלל 2 שלעיל). הערה זו קשורה לסעיפים א-ב הבאים.

---

[1] כלל שנלמד בסמסטר ב', אבל הוא כאן בשביל להבין כיצד הגיעו לחלק מהזהויות של הגבולות הבאים: אם ביטוי שואף ל-0 חלקי 0, או אינסוף חלקי אינסוף, אפשר לגזור את המונה ואת המכנה **בנפרד** עד שיהיה אפשר להציב את הגבול. ההוכחות לזהויות הגבול בעמוד מדגימות זאת ובעצם גם מוכיחות את הזהויות באמצעות הכלל.

[2] בדף התרגול כתותה הנוסחה עבור x בלבד ולא עבור kx. הנוסחה נכונה באופן כללי, ורשמנו והוכחנו אותה כאן בצורה הכללית. **כך גם לגבי כללים 4 ו-6.**

תרגיל 9

שאלה 1 סע' א':

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^{18}(1-\cos 5x)^{15}(e^{6x}-1)^{18}}{(1-\cos 5x)^{8}(\tan 7x)^{68}}=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^{18}(1-\cos 5x)^{7}(e^{6x}-1)^{18}}{(\tan 7x)^{68}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)^{18}}{x^{18}}\cdot x^{18}\cdot\frac{(1-\cos 5x)^{7}}{[(5x)^2]^7}\cdot[(5x)^2]^7\,\frac{(e^{6x}-1)^{18}}{(6x)^{18}}\cdot(6x)^{18}\cdot\frac{(7x)^{68}}{(\tan 7x)^{68}}\cdot\frac{1}{(7x)^{68}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos x}{x})^{18}\cdot(\frac{1-\cos 5x}{(5x)^2})^{7}\cdot(\frac{e^{6x}-1}{6x})^{18}\cdot(\frac{7x}{\tan 7x})^{68}\cdot\frac{x^{18}\cdot[(5x)^2]^7\cdot(6x)^{18}}{(7x)^{68}}$$

$$\frac{x^{18}\cdot[(5x)^2]^7\cdot(6x)^{18}}{(7x)^{68}}=\frac{[(5x)^2]^7\cdot(6x)^{18}}{(7x)^{68}}=\frac{x^{18}5^{14}x^{14}6^{18}x^{18}}{7^{68}x^{68}}=\frac{5^{14}\cdot 6^{18}}{7^{68}}\cdot\frac{1}{x^{18}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos x}{x})^{18}\cdot\frac{1}{x^{18}}\cdot(\frac{1-\cos 5x}{(5x)^2})^{7}\cdot(\frac{e^{6x}-1}{6x})^{18}\cdot(\frac{7x}{\tan 7x})^{68}\cdot\frac{5^{14}\cdot 6^{18}}{7^{68}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{1-\cos x}{x^2})^{18}\cdot(\frac{1-\cos 5x}{(5x)^2})^{7}\cdot(\frac{e^{6x}-1}{6x})^{18}\cdot(\frac{7x}{\tan 7x})^{68}\cdot\frac{5^{14}\cdot 6^{18}}{7^{68}}$$

$$=(\frac{1}{2})^{18}\cdot(\frac{1}{2})^{7}\cdot 1^{18}\cdot(\frac{1}{1})^{68}\cdot\frac{5^{14}\cdot 6^{18}}{7^{68}}=(\frac{1}{2})^{25}\cdot\frac{5^{14}\cdot 6^{18}}{7^{68}}=\frac{5^{14}\cdot 6^{18}}{2^{25}\cdot 7^{68}}=\frac{5^{14}\cdot 2^{18}\cdot 3^{18}}{2^{25}\cdot 7^{68}}=\frac{5^{14}\cdot 3^{18}}{2^{7}\cdot 7^{68}}$$

שאלה 1 סע' ב':

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\tan 2x)^4(1-\cos x)^9(e^{7x}-1)^5}{(\tan 5x)^4(\sin 5x)^{23}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^4(2x)^4(\frac{1-\cos x}{x})^9x^9(\frac{e^{7x}-1}{7x})^5(7x)^5(\frac{5x}{\tan 5x})^4\frac{1}{(5x)^4}(\frac{5x}{\sin 5x})^{23}\frac{1}{(5x)^{23}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^4(\frac{1-\cos x}{x})^9(\frac{e^{7x}-1}{7x})^5(\frac{5x}{\tan 5x})^4(\frac{5x}{\sin 5x})^{23}\frac{(2x)^4x^9(7x)^5}{(5x)^{23}(5x)^4}$$

$$\frac{(2x)^4x^9(7x)^5}{(5x)^{23}(5x)^4}=\frac{(2x)^4x^9(7x)^5}{(5x)^{23}(5x)^4}=\frac{2^4\cdot 7^5}{5^{27}}\cdot\frac{x^{18}}{x^{27}}=\frac{2^4\cdot 7^5}{5^{27}}\cdot\frac{1}{x^9}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^4(\frac{1-\cos x}{x})^9\cdot\frac{1}{x^9}(\frac{e^{7x}-1}{7x})^5(\frac{5x}{\tan 5x})^4(\frac{5x}{\sin 5x})^{23}\frac{2^4\cdot 7^5}{5^{27}}$$

$$=\lim_{x\to 0}(\frac{\tan 2x}{2x})^4(\frac{1-\cos x}{x^2})^9\cdot(\frac{e^{7x}-1}{7x})^5(\frac{5x}{\tan 5x})^4(\frac{5x}{\sin 5x})^{23}\frac{2^4\cdot 7^5}{5^{27}}$$

$$1^4\cdot(\frac{1}{2})^9\cdot 1^5\cdot(\frac{1}{1})^4\cdot(\frac{1}{1})^{23}\cdot\frac{2^4\cdot 7^5}{5^{27}}=(\frac{1}{2})^9\cdot\frac{2^4\cdot 7^5}{5^{27}}=\frac{2^4\cdot 7^5}{2^9\cdot 5^{27}}=\frac{7^5}{2^5\cdot 5^{27}}=(\frac{7}{2})^5\,\frac{1}{5^{27}}$$

שאלה 1 סע' ג':

$$\lim_{x\to 0}\frac{(\sin x)^{11}(1-\cos 2x)^7(e^{4x}-1)^7}{(e^x-1)^{15}(e^{7x}-1)^{17}}$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{11}\cdot x^{11}\cdot(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2})^7\cdot(2x)^{14}\cdot(\frac{e^{4x}-1}{4x})^7\cdot(4x)^7\cdot(\frac{x}{e^x-1})^{15}\cdot\frac{1}{x^{15}}\cdot(\frac{7x}{e^{7x}-1})^{17}\cdot\frac{1}{(7x)^{17}}$$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{\sin x}{x})^{11}(\frac{1-\cos 2x}{(2x)^2})^7(\frac{e^{4x}-1}{4x})^7(\frac{x}{e^x-1})^{15}(\frac{7x}{e^{7x}-1})^{17}\cdot\frac{x^{11}\cdot(2x)^{14}\cdot(4x)^7}{(7x)^{17}x^{15}}$$

$$\frac{x^{11}\cdot(2x)^{14}\cdot(4x)^7}{(7x)^{17}x^{15}}=\frac{x^{11}\cdot 2^{14}\cdot x^{14}\cdot 4^7x^7}{7^{17}x^{17}x^{15}}=\frac{2^{14}\cdot 4^7}{7^{17}}\cdot\frac{x^{11}\cdot x^{14}\cdot x^7}{x^{17}x^{15}}=\frac{2^{14}\cdot 2^{14}}{7^{17}}\cdot\frac{x^{32}}{x^{32}}=\frac{2^{28}}{7^{17}}$$

$$\lim_{x\to 0}=1^{11}\cdot(\frac{1}{2})^7\cdot 1^7\cdot(\frac{1}{1})^{15}(\frac{1}{1})^{17}\cdot\frac{2^{28}}{7^{17}}=(\frac{1}{2})^7\cdot\frac{2^{28}}{7^{17}}=\frac{2^{28}}{2^7\cdot 7^{17}}=\frac{2^{21}}{7^{17}}$$

הערות לתרגיל מס' 2:

בתרגיל 2 יש לנו ביטוי המורכב מבסיס ומעריך. כל הבסיסים – שואפים ל-1 בגבול.

מכיוון שכך, אנחנו יכולים להשתמש **במשפט החשוב** שיכול לעזור לנו לענות על השאלות:

אם $\lim a_n = 1$**, אזי** $\lim a_n^{b_n} = e^{\lim(a_n-1)b_n}$ **:**

1. $\lim_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{x^2}}$

נמצא את הגבול באמצעות המשפט שלעיל, ואח"כ סידור הגבול של המעריך לפי המשפטים שלמדנו בתרגיל הראשון.

$$\lim_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim(\cos 10x-1)\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 10x-1}{x^2}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 10x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}-1\cdot\frac{1-\cos 10x}{x^2} = \lim_{x\to 0}-1\cdot\frac{1-\cos 10x}{100x^2}\cdot 100$$

$$\lim_{x\to 0}-100\cdot\frac{1-\cos 10x}{(10x)^2} = -100\cdot\frac{1}{2} = -50$$

אגב, את הגבול של המעריך אפשר כמובן למצוא ישירות דרך לופיטל וזה אפילו קל יותר:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos 10x-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-10\sin 10x}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-100\cos 10x}{2} = \frac{-100\cdot 1}{2} = -50$$

נחזור לתרגיל ולתשובה שנקבל: $\lim_{x\to 0}(\cos 10x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\cos 10x-1}{x^2}} = e^{-50}$

2. $\lim_{x\to 0}(1+\sin 10x)^{\frac{1}{x}}$

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin 10x)^{\frac{1}{x}} = e^{\lim(\sin 10x)\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{x}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{10x}\cdot 10} = e^{1\cdot 10} = e^{1\cdot 10}$$

כתוספת (שלא חובה), נראה בלופיטל שהגבול במעריך אכן שווה ל-10:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 10x}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{10\cos 10x}{1} = \frac{10\cdot 1}{1} = 10$$

3. $\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 5x)^{\frac{1}{x^2}}$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 5x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 5x}{x^2}} = e^{\lim_{x\to 0}-1\cdot(\frac{\sin 5x}{x})^2}$$

$$\lim_{x\to 0}-1\cdot(\frac{\sin 5x}{x})^2 = \lim_{x\to 0}-1\cdot(5\frac{\sin 5x}{5x})^2 = -(5\cdot 1)^2 = -25$$

$$\lim_{x\to 0}(1-\sin^2 5x)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-25}$$

כתוספת (שלא חובה), נראה בלופיטל שהגבול במעריך אכן שווה ל-25-:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2 5x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin 5x\cdot\cos 5x\cdot 5}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-5\sin 10x}{2x} =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{-50\cos 10x}{2} = \frac{-50}{2} = -25$$