תרגולים 10־14 - מרטינגלים - תשע"ט

20 במאי 2019

- **הגדרה - "מרטינגל הפוך"**

  - מרטינגל $\mathbb{X}$ יקרא מרטינגל הפוך אם $\mathbb{X}=\{X_n\}_{n\leq 0}$ המכבד סינון עולה של סיגמא אלגבראות

$$\mathbb{F}=\{\mathcal{F}_n\}_{n\leq 0}=\{...\mathcal{F}_{-2}\subseteq\mathcal{F}_{-1}\subseteq\mathcal{F}_0\}$$

  ומקיים

$$\forall_{n\leq -1}\mathbb{E}[X_{n+1}\,|\,\mathcal{F}_n]=X_n$$

  - **משפט** - יהי T זמן עצירה חסום ע"י קבוע, ו־ $\{X_n\}$ מרטינגל. אזי $\mathbb{E}[X_T]=\mathbb{E}[X_0]$.

    * <u>תרגיל (בעית ההצבעה)</u>

    יהיו 2 מועמדים לבחירות מועמד A ומועמד B לאחר $a+b$ ספירות של קולות. מועמד A קיבל a קולות ומועמד B קיבל, איך לא, b קולות. ידוע כי $a>b$. אם נספור שוב את הקולות באקראי. מה ההסתברות ש A הוביל בכל תהליך הספירה?

    פתרון

    נסמן $X_k=1$ אם הקול ה־k שנספר היה לטובת A.

    נסמן $X_k=-1$ אם הקול ה־k שנספר היה לטובת B.

    נסמן a_k מספר הקולות ל־A אחרי ספירת k קולות

    ונסמן b_kמספר הקולות ל־B אחרי ספירת kקולות.

    נקבל:

$$A_k=\sum_{i=1}^{k}1_{\{x_i=1\}}$$

$$B_k = \sum_{i=1}^{k} 1_{\{x_i=-1\}}$$

על כן, היתרון של A לאחר k קולות יהיה:

$$S_k = A_k - B_k$$

מנתוני השאלה אנו יודעים כי $S_{a+b} = a - b > 0$ לכן, בזמן ה־ $a+b$ A מוביל.

איננו יודעים מה היה מצב ההובלה של A בזמן 1. (בזמן 0 לשניהם מצב קולות שווה־ 0)

לפיכך, נסתכל על ספירת הקולות מהסוף להתחלה ונקבל:

$$S_{a+b} = a - b > 0$$

ונרצה לחשב

$$\forall_{a+b-1 \geq k \geq 1} \mathbb{P}(S_{a+b-k} > 0)$$

נגדיר זמן עצירה: $T = \underset{k\in\{1,..,a+b-1\}}{min}\{k\,|S_{a+b-k} = 0\}$ ונרצה לחשב את

$$\mathbb{P}(T = a + b - 1) =?$$

כלומר, מה ההסתברות שהתהליך יעצור, פשוט כי נגמרה זפירת הקולות.

נגדיר את Y_k כדי שיהיה מרטינגל:

$$Y_k = \frac{S_{a+b-k}}{a+b-k}$$

עתה, Y_kמרטינגל ביחס לסינון המתאים:

$$\mathbb{E}[\frac{S_{a+b-(k+1)}}{a+b-(k+1)}|\mathcal{F}_{a+b-k}] =$$

$$\frac{S_{a+b-k}+1}{a+b-k-1} \cdot \mathbb{P}(Y_{k+1} = \frac{S_{a+b-k}+1}{a+b-k-1}) + \frac{S_{a+b-k}-1}{a+b-k-1} \cdot \mathbb{P}(Y_{k+1} = \frac{S_{a+b-k}-1}{a+b-k-1}) =$$

$$\frac{S_{a+b-k}+1}{a+b-k-1} \cdot \frac{A_{a+b-k}}{a+b-k} + \frac{S_{a+b-k}-1}{a+b-k-1} \cdot \frac{B_{a+b-k}}{a+b-k} =$$

$$\frac{(S_{a+b-k}+1) \cdot A_{a+b-k} + (S_{a+b-k}-1) \cdot B_{a+b-k}}{(a+b-k) \cdot (a+b-k-1)} =$$

$$\frac{S_{a+b-k}(A_{a+b-k}+B_{a+b-k})-(B_{a+b-k}-A_{a+b-k})}{(a+b-k)\cdot(a+b-k-1)}=$$

$$\frac{S_{a+b-k}(A_{a+b-k}+B_{a+b-k})-S_{a+b-k}}{(a+b-k)\cdot(a+b-k-1)}=$$

$$\frac{S_{a+b-k}\left[a+b-k-1\right]}{(a+b-k)\cdot(a+b-k-1)}=\frac{S_{a+b-k}}{(a+b-k)}=Y_k$$

לכן, Y_k מרטינגל . T הוא זמן עצירה (כל התהליך הוא תהליך סופי). אזי לפי משפט העצירה:

$$\mathbb{E}[Y_T]=\mathbb{E}[Y_0]=\mathbb{E}[\frac{S_{a+b}}{a+b}]=\frac{a-b}{a+b}$$

אם A תמיד מוביל אזי

$$Y_T=Y_{a+b-1}=S_1=1$$

אם A לא יוביל מתישהו אזי התהליך יעצור ב־ 0 ויתקיים $Y_T=0$. לפיכך

$$\mathbb{E}[Y_T]=1\cdot\mathbb{P}(A\,leads)+0\cdot\mathbb{P}(A\,don't\,lead)=\frac{a-b}{a+b}$$

כלומר,

$$\mathbb{P}(A\,leads)=\frac{a-b}{a+b}$$

כדרוש.

- **משפט התכנסות מרטינגל**

  - **ניסוח 1**

    * יהי $\{X_n\}$ תת מרטינגל כך ש־ $\underset{n}{Sup}\mathbb{E}[X_n^+]<\infty \Longleftarrow X_n \overset{a.s}{\to} X$ ו־ $X\in L^1$ (ההתכנסות לא בהכרח מתבצעת ב־ L^1).

  - **ניסוח 2**

    * יהי $\{X_n\}$ אחד מהבאים:

- על מרטינגל אי שלילי $\forall_n X_n \geq 0$
- מרטינגל חסום מלמעלה $X_n \leq Const$
- מרטינגל חסום מלמטה $X_n \geq Const$

* אזי $X \overset{a.s}{\to} X_n$ ו־ $X \in L^1$.

- <u>תרגיל</u>

יהי $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ משתנים מקריים בלתי תלויים המקיימים

$$\mathbb{P}(X_i = 1) = \mathbb{P}(X_i = -1) = \frac{1}{2}$$

נסמן $M_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. כבר הוכחנו ש־ $\{Z_n\}$ מרטינגל.
נגדיר זמן עצירה $T_{10} = inf\{n \in \mathbb{N} \,|\, Z_n = 10\}$
הוכח: (רמז: הילוך פשוט סימטרי הוא נשנה ־ כלומר התהליך יגיע לכל נקודה בזמן סופי).

1. $M_{n\wedge T_{10}} \overset{a.s}{\to} M$

(א) ברור כי $M_{n\wedge T_{10}} \leq 10$ לכן, $M_{n\wedge T_{10}} \overset{a.s}{\to} M$.

2. מה הערך של M

(א) $M = 10$

3. $\mathbb{E}[M_n] = ?$

(א) $\mathbb{E}[M_{n\wedge T_{10}}] = \sum_{k=1}^{n\wedge T_{10}} \mathbb{E}[X_k] = 0$. אבל $\mathbb{E}[M] = 10$ כלומר אין התכנסות ב־ L^1. כי

$$\mathbb{E}[|M_{n\wedge T_{10}} - M|] \nrightarrow 0$$