השלמה לריבוע

השלמה לריבוע היא שיטה אלגברית לטיפול בביטוי מהצורה: Ax^2+Bx+C

לרוב לשם פתרון של משוואה ריבועית.

השלמה לריבוע מתבצעת בשלבים הבאים:

A. נדאג הביטוי Ax^2+Bx יהפוך לביטוי

$$\left(\sqrt{A}\,x+\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2$$

2. הוספה זאת שהוספנו, כדי שלא לשנות את ערכו של הביטוי. מפחיתים שוב $-\frac{B^2}{2A}$

כלומר:

$$Ax^2+Bx=\left(\sqrt{A}\,x+\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2-\frac{B^2}{4A}$$

או לחילופין, אפשר לבצע זו בצורה הבאה:

A. נדאג הביטוי Ax^2+Bx יהפוך לביטוי

$$A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2$$

2. הוספה זאת שהוספנו, רק שלא לשנות את ערכו של הביטוי. מפחיתים שוב $-\frac{B^2}{4A}$

כלומר:

$$Ax^2+Bx=A\left(x+\frac{B}{2A}\right)^2-\frac{B^2}{4A}$$

דוגמאות:

A.
$$x^2+x+1\tfrac{1}{4}=x^2+2\cdot\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{4}+1=$$
$$=\left(x+\tfrac{1}{2}\right)^2+1$$

2.
$$x^2-4x-5=x^2-4x+4-4-5=$$
$$=x^2-4x+4-9=(x-2)^2-9$$

פרק ~~לספרים ראשוניים~~

חלוקת פולינום בפולינום

הגדרה: פולינום p (דרגה) אי פריק אם לא קיימים שני פולינומים r,s המקיימים $p=r\cdot s$ שבהם אחד הפולינומים r,s הוא ממעלה 1.

טענה: כל פולינום ניתן לפירוק כמכפלה של פולינומים אי-פריקים.

משפט: כל פולינום אי-פריק ~~הוא ממעלה~~ מעל $\mathbb{R}$ הוא ממעלה אחת או שניים.

מכאן נובע שכל פולינום הוא מכפלה של פולינומים ממעלה אחת ושניים, כלומר שווה למכפלה של פולינומים אי-פריקים.

משפט: יהיו $a(x), b(x) \in F[x]$, $b(x)\neq 0$
אזי קיימים פולינומים $r(x), q(x)$ המקיימים:

$$a(x) = b(x)\cdot q(x) + r(x) \qquad \deg r(x) < \deg(b(x))$$

(כולל האפשרות $r(x)=0$). המנה $q(x)$ והשארית $r(x)$ מוגדרים באופן יחיד ע"י האלגוריתם הנ"ל.

אם $r(x)=0$, (אומר ש) $b(x)$ מחלק את $a(x)$ בלי שארית ונרשום $b(x)|a(x)$

דוגמא 1: $b(x)=2x^2+2x+1$ $a(x)=x^3+3x^2+3$

מבצע חלוקת פולינומים עם שארית - זה ע"י חילוק ארוך כמו במספרים שלמים.

$$\begin{array}{r|l}
\frac{1}{2}x+1 & \\
\hline
x^3+3x^2+0\cdot x+3 & 2x^2+2x+1 \\
-\;(x^3+x^2+\frac{1}{2}x) & \\
\hline
2x^2-\frac{1}{2}x+3 & \\
-\;(2x^2+2x+1) & \\
\hline
-\frac{5}{2}x+2 &
\end{array}$$

לכן:

$$x^3+2x^2+3=(2x^2+2x+1)\left(\frac{1}{2}x+1\right)+\left(-\frac{5}{2}x+2\right)$$

<u>דוגמה 2:</u>

$$\begin{array}{r|l} 2x^2 & \\ \hline 2x^5+3x+1 & x^3-1 \\ -\,(2x^5-2x^2) & \\ \hline 2x^2+3x+1 & \end{array}$$

כי אין לעבור. יותר עם $2x^2$ דרגה מאשר x^3.

יוצאת המנה: $2x^2$ ויש שארית $2x^2+3x+1$

ומכאן: $2x^5+3x+1=2x^2(x^3-1)+2x^2+3x+1$

ולכן: $\dfrac{2x^5+3x+1}{x^3-1}=2x^2+\dfrac{2x^2+3x+1}{x^3-1}$

<u>דוגמה 3:</u>

$$\begin{array}{r|l} x^3+x & \\ \hline 2x^5+3x^3+x & 2x^2+1 \\ -\,(2x^5+x^3) & \\ \hline 2x^3+x & \\ -\,(2x^3+x) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

מכאן:

$$2x^5+3x^3+x=(x^3+x)(2x^2+1)$$

<u>פירוק לשברים חלקיים</u>

כל פונקציה רציונלית $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ כאשר $P(x),Q(x)$

פולינומים, רוצים לפרק את זה לשברים חלקיים.

~~מחלקים את הפולינום את~~ אם מעלת המונה

גדולה ממעלת המכנה מחלקים את הפולינום

ומקבלים: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\tilde{P}(x)+\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

כאשר $\tilde{P}(x)$ פולינום! $\deg R<\deg Q$, לכן

נניח להבא בה"כ ש $\deg P<\deg Q$.

נפרק את $Q(x)$ לגורמים אי-פריקים.

ונקבל שהפירוק הוא:

$$Q(x)=(x-a_1)^{e_1}(x-a_2)^{e_2}\cdots(x-a_m)^{e_m}(x^2-b_1x+c_1)^{f_1}(x^2-b_2x+c_2)^{f_2}\cdots$$
$$\cdots(x^2-b_nx+c_n)^{f_n}=R_1(x)^{e_1}\cdots R_m(x)^{e_m}S_1(x)^{f_1}\cdots S_n(x)^{f_n}$$

כאשר $\deg S_j = 2$, $\deg R_i = 1$

משפט: פירוק לשברים חלקיים:

אם $Q(x)$ מפורק כנ"ל, אזי:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_{1,1}}{R_1(x)} + \dots + \frac{A_{1,e_1}}{R_1(x)^{e_1}} + \frac{A_{2,1}}{R_2(x)} + \dots + \frac{A_{2,e_2}}{R_2(x)^{e_2}} + \dots +$$

$$+ \frac{A_{m,1}}{R_m(x)} + \dots + \frac{A_{m,e_m}}{R_m(x)^{e_m}} + \frac{B_{1,1}x + C_{1,1}}{S_1(x)} + \dots + \frac{B_{1,f_1}x + C_{1,f_1}}{S_1(x)^{f_1}} +$$

$$+ \dots + \frac{B_{n,1}x + C_{n,1}}{S_n(x)} + \dots + \frac{B_{n,f_n}x + C_{n,f_n}}{S_n(x)^{f_n}}$$

דוגמא 1 (פולינום ריבועי אי פריק במכנה)

$$\frac{1}{x^3 - x^2 + 4x - 4}$$

נשים לב כי $x^3 - x^2 + 4x - 4 = (x-1)(x^2+4)$

מפרקים לשברים חלקיים: עבור $A, B, C \in \mathbb{R}$:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx + C}{x^2+4}$$

$$\frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+4} = \frac{A(x^2+4) + (Bx+C)(x-1)}{(x-1)(x^2+4)} =$$

$$= \frac{(A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C}{(x-1)(x^2+4)}$$

ואנחנו רוצים שזה יהיה שווה ל $\frac{1}{(x-1)(x^2+4)}$:

כלומר נרצה:

$$(A+B)x^2 + (C-B)x + 4A - C = 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + 1$$

לכן, מהשוואת מקדמים של פולינומים נקבל:

$$A + B = 0$$

$$-B + C = 0$$

$$4A - C = 1$$

$$\left.\begin{array}{l} A+C=0 \\ 4A-C=1 \end{array}\right\} \quad 5A=1 \Rightarrow A=\frac{1}{5}$$

$$A+C=0 \Rightarrow C=-\frac{1}{5}$$

$$-B+C=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{5}$$

לכן:

$$\frac{1}{(x-1)(x^2+4)}=\frac{A}{x-1}+\frac{Bx+C}{x^2+4}=\frac{1}{5(x-1)}-\frac{x+1}{5(x^2+4)}$$

<u>דוגמא 2:</u>

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40}$$

נמצא פרוק: $x^2-3x-40=(x-8)(x+5)$

לכן קיימים ממשיים יחידים A, B כך ש:

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40}=\frac{x+3}{(x-8)(x+5)}=\frac{A}{x-8}+\frac{B}{x+5}$$

נכפיל את שני האגפים ב- $(x-8)(x+5)$ ונקבל:

$$x+3=A(x+5)+B(x-8)$$

<u>שיטה 1</u>

(נסדר באגף ימין של המשוואה את אשר מוכפל ב- x ואשר לא:

$$x+3=(A+B)x+(5A-8B)$$

מכיוון שיש שוויון בין שני האגפים של המשוואה, ניתן להשוות את המקדמים של החזקות:

$$A+B=1$$
$$5A-8B=3$$

הפתרון של מערכת משוואות זו: $A=11/13,\ B=2/13$

לפיכך מתקבל הפירוק הבא לשברים:

$$\frac{x+3}{x^2-3x-40}=\frac{11/13}{x-8}+\frac{2/13}{x+5}$$

<u>שיטה 2:</u> אם נציב $x=-5$ בשני האגפים נקבל:

$$-2=-5+3=B(-5-8)=-13B \Rightarrow B=\frac{2}{13}$$

נציב $x=8$ בשני האגפים ונקבל:

$$11=A(8+5)=13A \Rightarrow A=11/13$$

גורם ריבועי בלתי פריק במכנה

על מנת לפרק את השבר:

$$\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}$$

לשברים חלקיים, ראשית נשים לב כי:

$$x^3-8=(x-2)(x^2+2x+4)$$

ניתן לראות כי הביטוי x^2+2x+4 אינו פריק
באמצעות מספרים ממשיים מכיוון שהדיסקרימיננטה של
הביטוי הזה שלילית. לכן אנו מחפשים סקלרים
A,B,C כך ש:

$$\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}=\frac{10x^2+12x+20}{(x-2)(x^2+2x+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+4}$$

לאחר העלמת שברים אנו מקבלים:

$$10x^2+12x+20=A(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)$$

נציב $x=2$ במקום x ~~ונקבל~~: זה מאפס את
כל הביטוי הימני השני ואנו מקבלים:

$$10\cdot 2^2+12\cdot 2+20=A(2^2+2\cdot 2+4)$$

מכאן $12A=84 \Rightarrow A=7$

$$\Downarrow$$

$$10x^2+12x+20=7(x^2+2x+4)+(Bx+C)(x-2)$$

נציב $x=0$ ונקבל:

$$20=7\cdot 4+C(-2) \Rightarrow C=4$$

לכן:

$$10x^2+12x+20=7(x^2+2x+4)+(Bx+4)(x-2)$$

נציב 1 במקום x ונקבל:

$$10+12+20=7(1+2+4)+(B+4)(1-2)$$

מכאן $B=3$. אם כן, כל הפירוק לשברים
חלקיים של השבר הזה:

$$\frac{10x^2+12x+20}{x^3-8}=\frac{7}{x-2}+\frac{3x+4}{x^2+2x+4}$$

פירוקים חוזרים של גורם במכנה

לשבר שברים מהצורה הזו

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x+3)^5}$$

כאשר P הוא לא כל פולינום שהוא ממעלה
(מנה פולי') הפירוק לשברים חלקיים נעשה באופן
הבא:

$$\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x+3}+\frac{C}{(x+3)^2}+\frac{D}{(x+3)^3}+\frac{E}{(x+3)^4}+\frac{F}{(x+3)^5}$$

<u>לדוגמה:</u> נפרק את השבר הבא:

$$\frac{10x^2-63x+29}{x^3-11x^2+40x-48}$$

<u>המכנה מתפרק באופן הבא:</u>

$$x^3-11x^2+40x-48=(x-3)(x-4)^2$$

הגורם $(x-4)$ חוזר על עצמו במכנה לכן הפירוק
לשברים חלקיים נעשה בצורה הבאה:

$$\approx 13.57$$

$$\frac{10x^2-63x+29}{x^3-11x^2+40x-48}=\frac{10x^2-63x+29}{(x-3)(x-4)^2}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-4}+\frac{C}{(x-4)^2}$$

$A=-70$ $B=10.72$ $C=-63$

לשבר שברים מהצורה הזו:

$$\frac{P(x)}{(x+2)(x^2+1)^5}$$

$$\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}+\frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}+\frac{Fx+G}{(x^2+1)^3}+\frac{Hx+I}{(x^2+1)^4}+\frac{Jx+K}{(x^2+1)^5}$$

<u>דוגמה:</u>

$$f(x)=\frac{x^4-2x^3-x^2-5}{(x^2+x+1)(x-3)}$$

הגורמים האי פריקים של המכנה הם $x-3$
ו- x^2+x+1 לכן לפי המשפט אפשר לרשום את f:

$$f(x)=(Ax+B)+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}+\frac{E}{x-3}$$

נכפיל במכנה המשותף ונקבל:

$$(Ax+B)(x^2+x+1)(x-3)+(Cx+D)(x-3)+E(x^2+x+1)=$$

$$=x^4-2x^3-x^2-5$$

$\cancel{1} \cancel{=} \cancel{A}$

$-2 = -2\cancel{A}$

נציב $x=-3$ ונקבל:

$\cancel{E(9-3+1) = (-3)^4 - 2(-3)^3 - 9 - 5}$

$7E = 121 \Rightarrow E = \frac{121}{7}$

$A = 1$

$-2 = -2A + B$

$-1 = -2A - 3B + C + E$

$\cancel{-1 = -2A - 3B + C + E}$

$0 = -3A - 2B - 3C + D + E$

$-5 = -3B - 3D + E$

לאחר מציאת הערכים של A, B, C, D, E נקבל:

$$\frac{x^4-2x^3-x^2-5}{(x^2+x+1)(x-3)} = x + \frac{1}{x-3} + \frac{2}{x^2+x+1}$$