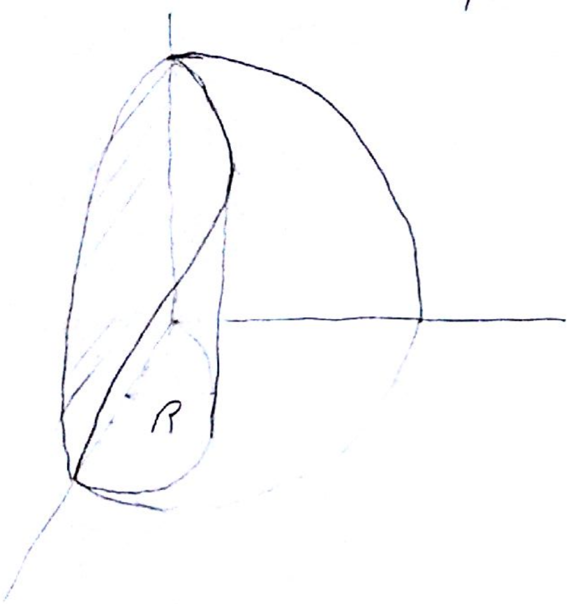
1) מצא את שטח הפנים של ההמספירה בעלת רדיוס a החתוכה ע"י הגליל בעל קוטר a



פתרון: משוואת ההמספרה היא $\{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=a^2, z\geq 0\}$

לכן $\psi(u,v)=(u,v,\sqrt{a^2-u^2-v^2})$

$$\psi_u=\left(1,0,\frac{1}{2\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\cdot(-2u)\right)$$

$$\psi_v=\left(0,1,\frac{1}{2\sqrt{a^2-u^2-v^2}}(-2v)\right)$$

$$\psi_u\times\psi_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & \frac{-2u}{2\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \\ 0 & 1 & \frac{-2v}{2\sqrt{a^2-u^2-v^2}} \end{vmatrix}=$$

$$\frac{+u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\hat{i}+\frac{+v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\hat{j}+1\hat{k}$$

$$\Rightarrow \|\psi_u\times\psi_v\|=\sqrt{\frac{u^2+v^2}{a^2-(u^2+v^2)}+1}=\frac{a}{\sqrt{a^2-(u^2+v^2)}}$$

$$\Rightarrow 2\iint_R \frac{a}{\sqrt{a^2-(u^2+v^2)}}\,du\,dv$$

(2)

$(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4} \Rightarrow x^2+y^2=ax$ משוואה - הבסיס היא

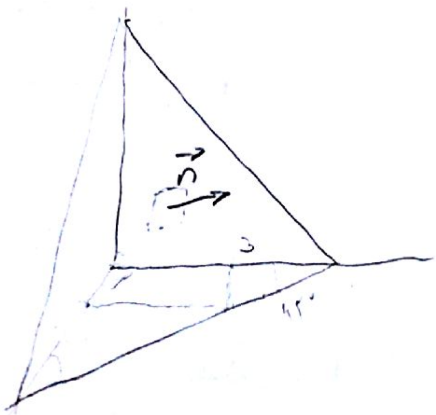
$\Rightarrow r=a\cos\theta$

$\Rightarrow 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{a\cos\theta} \frac{a}{\sqrt{a^2-r}}\, r\,dr\,d\theta = 2a\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}} -\sqrt{a^2-r^2}\Big|_{r=0}^{a\cos\theta} d\theta$

$2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin\theta)\,d\theta=(\pi-2)a^2$

ב) חשב $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$ כאשר $F=xy\hat{i}-x^2\hat{j}+(x+z)\hat{k}$

ו S הוא החלק של המישור $2x+2y+z=6$ אשר
נמצא באוקטנט הראשון.



ב בינתיים נמצא נורמל ל S ע"י שימוש ב ∇ של הפונקציה $G=2y+2x=G(x,y,z)$
כלומר $\hat{n}=(2,2,1)\frac{1}{\sqrt{2^2+2^2+1}}$ הוא מאונך למישור. (נרמלנו כבר).

$\Rightarrow \hat{n}=(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3})$

$\vec{F}\cdot\vec{n}=\frac{2}{3}xy-\frac{2}{3}x^2+(x+z)\frac{1}{3}$

$\psi(u,v):(u,v)\to(u,v,6-2u-2v)$

$\psi_u=(1,0,-2) \quad \psi_v=(0,1,-2)$

$\psi_u\times\psi_v=\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}=2\hat{i}+2\hat{j}+1\hat{k}$

(3)

$\| \psi_u \times \psi_v \| = 3$

$\vec{F} \cdot \vec{n} = \frac{2}{3} uv - \frac{2}{3} u^2 + (6-3v) \cdot \frac{1}{3}$

$\int_0^3 \int_0^{3-u} 2uv - 2u^2 + (6-2v-u)\, du\, dv$

$= \int_0^3 \left[uv^2 - 2u^2 v + 6v - v^2 - uv \right]\Big|_0^{3-u} du = \frac{27}{4}$

3) חשב את

$I = \int_S xz^2\, dy\wedge dz + (x^2 y - z^3)\, dz\wedge dx + (2xy + y^2 z)\, dx\wedge dy$.

באינטגרל_משטחי כאשר S הינה חצי-ספירה עליונה –

המכוונת

$\psi(u,v) = (u, v, \sqrt{a^2-u^2-v^2})$

$\psi_u = \left(1, 0, \frac{u}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\right) \quad \psi_v = \left(0, 1, \frac{v}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\right)$

$dy\wedge dz \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix} = \frac{u}{\sqrt{a^2-v^2-u^2}}$

$dz\wedge dx \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix} = \frac{v}{\sqrt{a^2-v^2-u^2}}$

$dx\wedge dy \begin{pmatrix} \psi_u \\ \psi_v \end{pmatrix} = 1$

$\Rightarrow I = \int xz^2 \frac{u}{\sqrt{a^2-v^2-u^2}}\, du\, dv + (x^2 y - z^3) \frac{v}{\sqrt{a^2-v^2-u^2}}\, du\, dv$

$+ (2xy + y^2 z)\, du\, dv$

$= \iint \left[xz^2 \frac{u}{a} + (x^2 y - z^3) \frac{v}{a} + (2xy + y^2 z) \frac{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{a} \right] \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}\, du$

נשים לב כי $\hat{n} = \left(\frac{u}{a}, \frac{v}{a}, \frac{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}{a}\right)$ וכי $\|\psi_u \times \psi_v\| = \frac{a}{\sqrt{a^2-u^2-v^2}}$

לכן קיבלנו התאמה לנוסחה.

(4)

$$\Rightarrow I = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$$

כאשר $\vec{F} = (xz^2,\ x^2y - z^3,\ 2xy + y^2z)$

לפי משפט הדיברגנץ

$$I = \int_H div(F)\, dV \qquad div(F) = z^2 + x^2 + y^2 = r^2$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2\cdot r^2 \sin\theta\, d\theta\, dr\, d\varphi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^4(-\cos\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{a} r^4\, dr\, d\varphi$$

$$= 2\pi \frac{r^5}{5}\Big|_0^a = \frac{2\pi}{5}a^5$$

3. החלק שהיה חסר ברצוי חלקו.

לאחר שמצאנו שהאינטגרל I הינו למעשה השטף של ההמיספרה. נמצא את הביטוי I על $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2=a^2,\ z=0\}$ כאשר S החלק התחתון של ההמיספרה. אם נגדיר כי שם נגדיר $\psi:(u,v)\to(x,y)$ אזי

$$\begin{matrix}\psi_u \\ \psi_v\end{matrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow dy\wedge dz = dz\wedge dx = 0$$

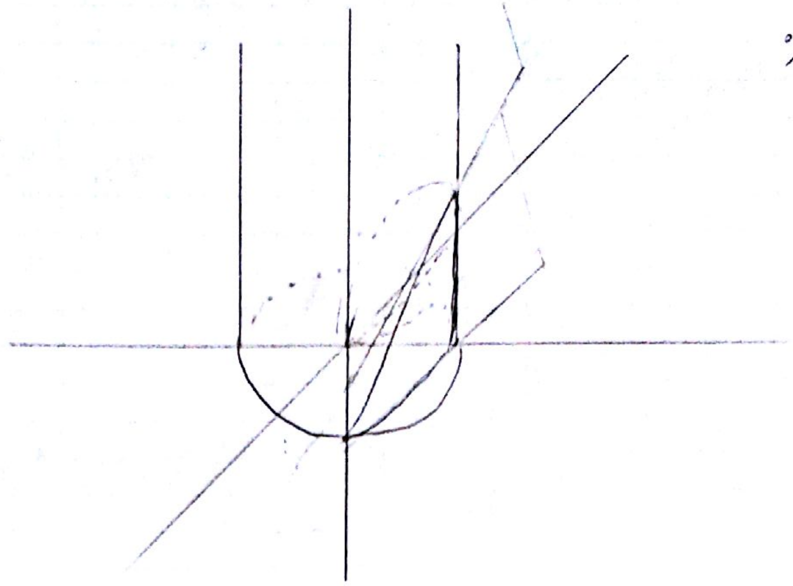
ו- $dx\wedge dy(\psi_u, \psi_v) = 1$ מכאן שזה החלק התחתון של ההמיספרה.

$$I = \int_S (2xy + y^2z)\, du\, dv = \int_S \vec{F}\cdot\vec{n}\, ds$$

5

4) מצא את שטח הפנים של הגליל $x^2+y^2=a^2$
בין המישורים $z=2x$, $z=x$, $z\ge 0$.

פתרון:



נבצע פרמטריזציה $\psi:(\theta,z)\to(a\cos\theta, a\sin\theta, z)$ $-\frac{\pi}{2}\le\theta\le\frac{\pi}{2}$, $a\cos\theta\le z\le 2a\cos\theta$

$$\psi_\theta=(-a\sin\theta, a\cos\theta, 0)$$

$$\psi_z=(0, 0, 1)$$

$$\psi_\theta\times\psi_z=\begin{vmatrix} i & j & k \\ -a\sin\theta & a\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=a\cos\theta i+a\sin\theta j$$

$$\Rightarrow \|\psi_\theta\times\psi_z\|=a$$

לפי הנוסחה

$$\int_M dS=\iint_D \|\psi_\theta\times\psi_z\|\,d\theta\,dz$$

נקבל ש

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{a\cos\theta}^{2a\cos\theta} a\,dz\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a(2a\cos\theta-a\cos\theta)\,dz$$

$$=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} a^2\cos\theta\,dz=2a^2.$$