פתרון תרגיל 1 – אלגברה מופשטת

1. קבעו עבור כל אחת מהמערכות הבאות אם היא חבורה למחצה , אם היא מונואיד ואם היא חבורה. הוכיחו.

1.1 קבוצת המספרים הזוגיים עם פעולת הכפל.

פתרון: הפעולה סגורה מכיוון שהמכפלה של שני זוגיים היא זוגית.

הפעולה אסוציאטיבית כי כפל טבעיים הוא אסוציאטיבי.

לכן המערכת מהווה חבורה למחצה.

לא קיים איבר יחידה למערכת (אכן, אם נניח בשלילה כי $a \in 2Z$ הוא איבר יחידה, אז לכל מספר זוגי b יתקיים $ab = b$. בפרט עבור $b = 2$ נקבל $2a = 2$ וצמצום בשתיים ייתן כי $a = 1$ בסתירה לכך ש a זוגי).

לכן המערכת אינה מונואיד ובפרט אינה חבורה.

1.2 קבוצת המטריצות ההפיכות בגודל 3×3 מעל הממשיים ביחס לפעולת החיבור.

פתרון: המערכת אינה סגורה ביחס לפעולה.

אכן: המטריצות $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ הן מטריצות הפיכות. הסכום שלהם הוא מטריצת האפס שאינה הפיכה.

לכן, המערכת אינה חבורה למחצה ובפרט אינה מונואיד ואינה חבורה.

1.3 קבוצת המספרים הממשיים עם הפעולה $a * b = \frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$

פתרון: (המערכת סגורה. אכן, לכל a,b ממשיים $\frac{1}{2}\left(a^2 + b^2\right)$ הוא מספר ממשי).

הפעולה אינה אסוציטיבית. אכן עבור $a = 2, b = 2, c = 0$ מתקיים

$$(a*b)*c = (2*2)*0 = \frac{1}{2}\left(2^2 + 2^2\right)*0 = 4*0 = \frac{1}{2}\left(4^2 + 0^2\right) = 8$$

$$\neq$$

$$a*(b*c) = 2*(2*0) = 2*\frac{1}{2}\left(2^2 + 0^2\right) = 2*2 = \frac{1}{2}\left(2^2 + 2^2\right) = 4$$

לכן, המערכת אינה חבורה למחצה ובפרט אינה מונואיד ואינה חבורה.

1.4 קבוצת המטריצות $\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a,b \in R\right\}$ עם פעולת הכפל.

פתרון: ראינו בתרגול כי המערכת סגורה. אסוציאטיביות מתקיימת מכיוון שכפל מטריצות הוא אסוציטיבי. הוכחנו התרגול כי למערכת אין איבר יחידה. לכן המערכת היא חבורה למחצה אך אינה מונואיד ובפרט אינה חבורה.

1.5 קבוצת הטבעיים עם הפעולה $m * n = \max\{m,n\}$.

פתרון: סגירות הפעולה ברורה.

הפעולה אסוציאטיבית שכן לכל m,n,k טבעיים מתקיים

$$(m*n)*k = \max\{m,n\}*k = \max\{\max\{m,n\},k\} = \max\{m,n,k\} = \max\{m,\max\{n,k\}\} =$$
$$m*\max\{n,k\} = m*(n*k)$$

איבר יחידה: המספר הטבעי 1 הוא איבר היחידה של המערכת. אכן, לכל m טבעי מתקיים $m*1 = \max\{m,1\} = m$ וכן $1*m = \max\{1,m\} = m$

לכן המערכת היא מונואיד.

המערכת אינה חבורה כי למספר 2 אין הופכי. אכן לכל m טבעי מתקיים $2*m = \max\{2,m\} \geq 2$ ובפרט $2*m \neq 1$.

1.6 קבוצת הממשיים עם הפעולה $a*b = a+b+2$.

פתרון: סגירות הפעולה ברורה.

הפעולה אסוציאטיבית. אכן, יהיו a,b,c ממשיים. אזי

$$(a*b)*c = (a+b+2)*c = a+b+2+c+2 = a+(b+c+2)+2 =$$
$$a+(b*c)+2 = a*(b*c)$$

איבר נייטרלי: $e=-2$ הוא איבר נייטרלי (הוכיחו!)

איבר הופכי: לכל a האיבר $a-4$ הוא איבר הופכי (הוכיחו!)

2. יהי $M=\{1,a,b,c\}$ מונואיד בעל ארבעה איברים שבו 1 איבר יחידה ומתקיים $ab=c, bc=a, ca=b$.

2.1 הוכיחו כי $a^2=b^2=c^2$.

הוכחה: נשתמש באסוציאטיביות של המונואיד ובמכפלות הנתונות.

$$aa = a(bc) = (ab)c = cc$$

$$aa=(bc)a=b(ca)=bb$$

לכן $a^2=b^2=c^2$.

2.2 הוכיחו כי $a^2 \neq a$

פתרון: נניח בשליה כי $a^2=a$.

מכך ש $ab=c$ נובע, ע"י כפל משמאל כי $aab=ac$ אבל $a^2=a$ גורר ש$ab=ac$ לכן $c=ac$.

נשתמש באסוציאטיביות ובסעיף הקודם ונקבל ש $ac=(cc)c=c(cc)=c(aa)=ca$ לכן $c=ca=b$ בסתירה לכך ש b,c איברים שונים.

3. יהי M מונואיד ויהיו $a,b\in M$. הוכיחו את הטענות הבאות.

3.1 אם a הפיך אז קיים לו הופכי יחיד.

הוכחה: נסמן ב e את איבר היחידה של המונואיד.

יהיו b,c הופכיים של a. צ"ל כי $a=b$.

מהנתון נובע כי $ab=ba=e$ וכן $ac=ca=e$.

מאסוציאטיביות נקבל: $a=ae=a(bc)=(ab)c=ec=c$ כדרוש.

3.2 אם aba הפיך אז גם a,b הפיכים.

הוכחה: לפי הנתון קיים c כך ש $c(aba)=(aba)c=e$.

מאסוציאטיביות נקבל: $a(bac)=(aba)c=e$ לכן a הפיך מימין. בדומה $(cab)a=c(aba)=e$ לכן a הפיך משמאל. מכיוון ש a הפיך גם מימין וגם משמאל הוא הפיך.

נסמן את ההופכי של a ב a^{-1}. נכפול את השוויון $(aba)c=e$ משמאל ב a^{-1} ומימין ב a. אזי $a^{-1}abaca=a^{-1}ea$ נצמצם $a^{-1}a$ ונקבל: $baca=e$ לכן b הפיך מימין.

בדומה מהשוויון $c(aba)=e$ נובע כי b הפיך משמאל ובסה"כ הפיך.

4. ענו על הסעיפים הבאים.

4.1 קבעו אם הקבוצה $M=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a,b\in R, a^2+b^2>0\right\}$ היא חבורה למחצה, מונואיד או חבורה, ביחס לכפל מטריצות.

פתרון: נראה כי זוהי חבורה.

סגירות: יהיו $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ שתי מטריצות ממשיות עם דטרמיננה חיובית (שימו לב כי הדרישה $a^2+b^2>0$ משמעה דטרמיננטה חיובית).

לפי כפליות הדטרמיננטה, מכפלת המטריצות תהיה בעלת דטרמיננטה חיובית. חישוב פשוט מראה כי היא מהצורה הדרושה:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac-bd & ad+bc \\ -(ad+bc) & ac-bd \end{pmatrix}$$

אסוציאטיביות נובעת מאסוציאטיביות של כפל מטריצות.

איבר היחידה הוא מטריצת הזהות.

ההופכי של המטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ הוא $\frac{1}{a^2+b^2}\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ השייך לקבוצה M.

לכן, M הינה חבורה.

4.2 תהי $G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} : a,b,c \in R \right\}$. הוכיחו כי G חבורה ביחס לכפל מטריצות.

חבורה זו נקראת חבורת הייזנברג.

פתרון: סגירות :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & d & e \\ 0 & 1 & f \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d+a & e+af+b \\ 0 & 1 & f+c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G$$

אסוציאטיביות : נובעת מהאסוציאטיביות של כפל מטריצות.

איבר היחידה: מטריצת הזהות.

הופכי : אפשר למצוא בקלות כי ההופכי הינו

$$\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in G.$$

5. תהיינה $(G,\bullet),(H,*)$ חבורות. נגדיר פעולה $\cdot$ על המכפלה הקרטזית $G\times H$ כדלהלן: $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2)$. הוכיחו כי $G\times H$ היא חבורה תחת פעולה זו.

פתרון: בדיקה ישירה של התכונות:

סגירות - $(g_1,h_1)\cdot(g_2,h_2)=(g_1\bullet g_2,h_1*h_2) \Leftrightarrow g_1\bullet g_2\in G, h_1*h_2\in H$

וכמובן ש $g_1 \bullet g_2 \in G, h_1 * h_2 \in H$ שהרי G,H חבורות ולכן סגורות לפעולה.

אסוציאטיביות -

$$\left(\left(g_1,h_1\right)\cdot\left(g_2,h_2\right)\right)\cdot\left(g_3,h_3\right)=\left(g_1\bullet g_2,h_1*h_2\right)\cdot\left(g_3,h_3\right)=\left(\left(g_1\bullet g_2\right)\bullet g_3,\left(h_1*h_2\right)*h_3\right)$$
$$=\left(g_1\bullet\left(g_2\bullet g_3\right),h_1*\left(h_2*h_3\right)\right)=\left(g_1,h_1\right)\cdot\left(g_2\bullet g_3,h_2*h_3\right)$$

איבר היחידה - $\left(e_G,e_H\right)$.

הופכי - $\left(g,h\right)\left(g^{-1},h^{-1}\right)=\left(g\bullet g^{-1},h*h^{-1}\right)=\left(e_G,e_H\right)\quad \forall g\in G,h\in H$. ובדומה עבור המכפלה בסדר הפוך.

6. יהי $\left(M,\cdot\right)$ מונואיד, ויהי $a\in M$. נגדיר פעולה בינארית חדשה: $x*y=x\cdot a\cdot y$.

הוכיחו ש-$\left(M,*\right)$ הוא חבורה לְמֶחֱצָה.

מצאו תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-$\left(M,*\right)$ הוא מונואיד.

פתרון: תחילה נשים לב שהפעולה מוגדרת היטב שכן $x*y=x\cdot a\cdot y\in M$. קל לראות שהפעולה אסוציאטיבית:

$\left(x*y\right)*z=\left(x\cdot a\cdot y\right)*z=\left(x\cdot a\cdot y\right)\cdot a\cdot z=x\cdot a\cdot\left(y\cdot a\cdot z\right)=x*\left(y*z\right)$.

לכן $\left(M,*\right)$ הוא חבורה לְמֶחֱצָה.

נסמן ב-e את איבר היחידה של המונואיד $\left(M,\cdot\right)$.

טענה: תנאי הכרחי ומספיק לכך ש $\left(M,*\right)$ הוא מונואיד הוא ש a איבר הפיך ב $\left(M,\cdot\right)$.

התנאי מספיק מכיוון שאם a הפיך ונסמן את ההופכי שלו ב-a^{-1} נקבל ש a^{-1} הוא איבר יחידה ב $\left(M,*\right)$: $x*a^{-1}=x\cdot a\cdot a^{-1}=x\cdot e=x; a^{-1}*x=a^{-1}\cdot a\cdot x=e\cdot x=x$.

התנאי הכרחי: אם $\left(M,*\right)$ מונואיד קיים בו איבר יחידה שנסמנו ב-t.

מתקיים: $t*e=t\cdot a\cdot e=t\cdot a\ ;\ e*t=e\cdot a\cdot t=a\cdot t$ ולכן a הפיך ב $\left(M,\cdot\right)$.

בהצלחה! ☺