פתרון תרגיל 4 גיאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית תשע"ו

25 במרץ 2016

1. נשתמש בנוסחה: $L = \int_a^b \left\|\gamma'(t)\right\| dt$.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = \left(-3a\cos^2 t\sin t, 3a\sin^2 t\cos t\right)$$

ולכן:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2\cos^4 t\sin^2 t + 9a^2\sin^4 t\cos^2 t}dt = 3a\cdot\int_0^{2\pi}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}dt =$$

לפי הזהות $\sin^2 t + \cos^2 t$. לפי הזהות $\sin 2t = 2\cos t\sin t$ נקבל:

$$= \frac{3a}{2}\cdot\int_0^{2\pi}\left|\sin 2t\right| dt =$$

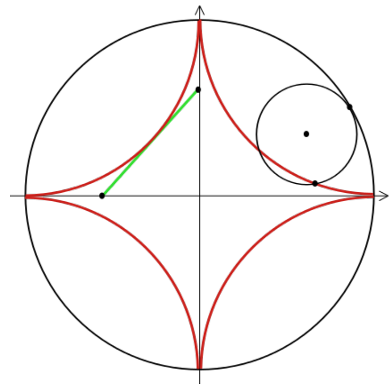
נחלק את האינטגרל לפי תחומי החיובית והשליליות של $\sin 2t$:

$$= \frac{3a}{2}\cdot\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2tdt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} -\sin 2tdt + \int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}}\sin 2tdt + \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} -\sin 2tdt\right)$$

כל אחד מהאינטגרלים שווה ל-1, ולכן:

$$L = \frac{3a}{2}\cdot 4 = 6a$$

עקומה זו נקראת **אסטרואידה.** אסטרואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 4 מרדיוס המעגל הפנימי.



ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2a\sin t - 2a\sin 2t, 2a\cos t - 2a\cos 2t)$$

לכן:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2\sin^2 t + 8a^2\sin t\sin 2t + 4a^2\sin^2 2t + 4a^2\cos^2 t - 8a^2\cos t\cos 2t + 4a^2\cos^2 2t}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{8a^2(1+\sin t\sin 2t - \cos t\cos 2t)}dt =$$

לפי הזהות $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$. לפי זהויות לזווית כפולה:

$$\sin 2t = 2\cos t\sin t, \cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$$

$$= 2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{2\sin^2 t\cos t - \cos t + 2\sin^2 t\cos t + 1}dt =$$

כעת, נציב $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ ונקבל:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} \sqrt{-4\cos^3 t + 3\cos t + 1}dt =$$

נשים לב שמתקיים: $-4\cos^3 t + 3\cos t + 1 = (1-\cos t)(2\cos t + 1)^2$,
ולכן:

$$2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi} |2\cos t + 1|\sqrt{1-\cos t}dt =$$

את האינטגרל אפשר לפתור באמצעות זהות לזווית כפולה:

$$\cos t = 1 - 2\sin^2\frac{t}{2}$$

ואז: $\sqrt{1-\cos t} = \sqrt{2\sin^2\frac{t}{2}} = \sqrt{2}\left|\sin\frac{t}{2}\right|$, ונקבל את האינטגרל:

$$4a\int_0^{2\pi}\left|(2\cos t + 1)\sin\frac{t}{2}\right|dt =$$

לפי זהות לזווית כפולה: $\cos t = 2\cos^2\frac{t}{2} - 1$, ולכן:

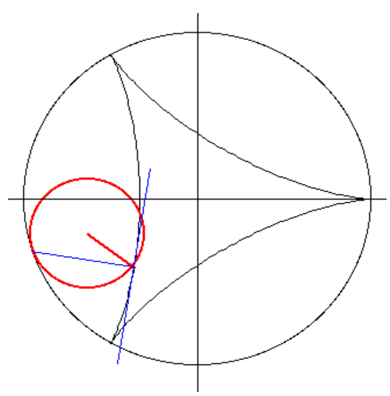
$$4a\int_0^{2\pi}\left|\left(4\cos^2\frac{t}{2} - 1\right)\sin\frac{t}{2}\right|dt$$

לאחר שנפריד את הערך המוחלט לפי תחומים, נציב $u = \cos\frac{t}{2}$ ונקבל $du = -\frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}dt$.

מכאן האינטגרל פשוט, ולאחר שחוזרים חזרה ל־t הפתרון הוא $\frac{2}{3}\sqrt{1-\cos 3t}\cot\left(\frac{3t}{2}\right)$.
בתחום שלנו, בכל אופן, נקבל:

$$L = 4a \cdot 4 = 16a$$

עקומה זו נקראת **דלתואידה.** דלתואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) בתוך מעגל אחר בעל רדיוס גדול פי 3.



(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (a - a\cos t, a\sin t)$$

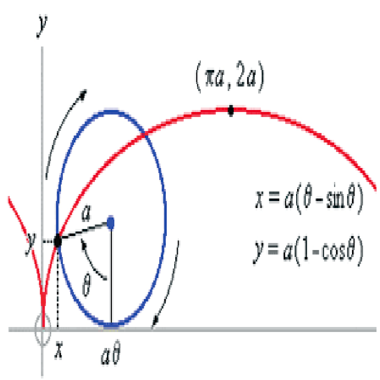
לכן:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{a^2-2a^2\cos t+a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}dt=\int_0^{2\pi}\sqrt{2a^2\left(1-\cos t\right)}dt$$

לפי הזהות $\sin^2 t+\cos^2 t=1$. לפי זהות לזווית כפולה: $1-\cos t=2\sin^2\frac{t}{2}$,
ולכן:

$$=2a\int_0^{2\pi}\left|\sin\frac{t}{2}\right|dt=4a\int_0^{\pi}\sin\frac{t}{2}dt=4a\cdot 2=8a$$

עקומה זו נקראת **ציקלואידה.** ציקלואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) על קו ישר.



(ד) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'\left(t\right)=\left(-2a\sin t+2a\sin 2t,2a\cos t-2a\cos 2t\right)$$

לכן, בדומה לדלתואידה:

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2 t-8a^2\sin t\sin 2t+4a^2\sin^2 2t+4a^2\cos^2 t-8a^2\cos t\cos 2t+4a^2\cos^2 2t}dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{8a^2\left(1+\sin t\sin 2t-\cos t\cos 2t\right)}dt=$$

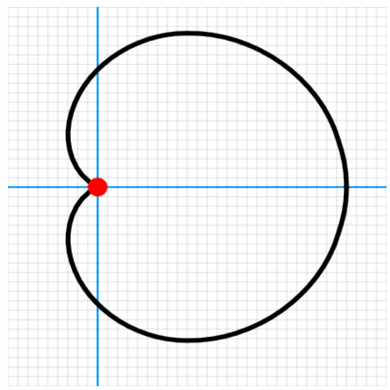
לפי זהויות של זווית כפולה:

$$=2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{-2\sin^2 t\cos t-\cos t+2\sin^2 t\cos t+1}dt=2\sqrt{2}a\int_0^{2\pi}\sqrt{1-\cos t}=$$

בדומה לציקלואידה, האינטגרל הזה שווה ל־$4\sqrt{2}$, ולכן:

$$L = 2\sqrt{2}a \cdot 4\sqrt{2} = 16a$$

עקומה זו נקראת **קרדיואידה.** קרדיואידה מתארת את מסלולה של נקודה קבועה על גבי מעגל המתגלגל (ללא החלקה) סביב מעגל אחר בעל רדיוס זהה.



מומלץ לחפש ברחבי המרשתת אנימציות המתארות את היווצרות העקומות הללו.

2. נשתמש בנוסחה ל־s וננסה להפוך את הפונקציה שנקבל.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = (-2\sin t, 2\cos t)$$

ולכן:

$$s(t) = \int_0^t \|\gamma'(x)\|\, dx = \int_0^t \sqrt{4\sin^2 x + 4\cos^2 x} dx = \int_0^t 2dx = 2t$$

לכן, הפרמטר הטבעי יהיה $t = \frac{s}{2}$, והפרמטריזציה הטבעית:

$$\gamma(s) = \left(1 + 2\cos\frac{t}{2}, -3 + 2\sin\frac{t}{2}\right)$$

(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = \left(1, t\sqrt{2+t^2}\right)$$

ולכן:

$$s(t)=\int_0^t\left\|\gamma'(x)\right\|dx=\int_0^t\sqrt{1+x^2\left(2+x^2\right)}dx=\int_0^t\left(1+x^2\right)dx=\frac{t^3}{3}+t$$

עלינו למצוא את t כביטוי של s.

נתבונן במשוואה:

$$\frac{t^3}{3}+t-s=0$$

ונפתור אותה באמצעות הנוסחה הכללית למשוואה ממעלה שלישית. הפתרון הממשי היחיד הוא:

$$t=\sqrt[3]{\frac{3s}{2}+\sqrt{1+\frac{9s^2}{4}}}+\sqrt[3]{\frac{3s}{2}-\sqrt{1+\frac{9s^2}{4}}}$$

וזהו הפרמטר הטבעי. כדי למצוא את הפרמטריזציה הטבעית, נציב זאת ב־ $\gamma(t)$.

(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=\left(1,\sinh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן:

$$s(t)=\int_0^t\left\|\gamma'(x)\right\|dx=\int_0^t\sqrt{1+\sinh^2\frac{x}{a}}dx=\int_0^t\cosh\frac{x}{a}dx=a\sinh\frac{t}{a}$$

לפי הזהות $1+\sinh^2 t=\cosh^2 t$.

נחלץ את t ונקבל: $t(s)=a\cdot arcsinh\frac{s}{a}$. אם נציב זאת ב־ $\gamma(t)$, לאחר שנשתמש בזהויות של הפונקציות ההיפרבוליות נקבל:

$$\gamma(s)=\left(a\cdot arcsinh\frac{s}{a},a\sqrt{a^2+s^2}\right)$$

וזוהי הפרמטריזציה הטבעית.

3. אם ניתן, נשתמש בנוסחה לפרמטריזציה טבעית. אחרת, נשתמש בנוסחה הכללית.

(א) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t)=(-2\sin t,2\cos t)$$

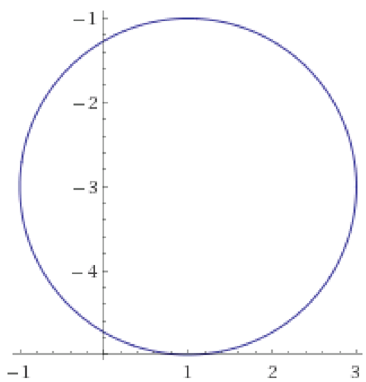
וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''(t)=(-2\cos t,-2\sin t)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} -2\sin t & -2\cos t \\ 2\cos t & -2\sin t \end{vmatrix}}{\left(4\cos^2 t + 4\sin^2 t\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

זהו מעגל שרדיוסו 2, ולכן הגיוני שעקמומיותו תהיה $\frac{1}{2}$.



(ב) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(t) = \left(1, \sinh\frac{t}{a}\right)$$

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''(t) = \left(0, \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}\right)$$

ולכן העקמומיות היא:

$$k(t) = \frac{\det(\gamma'(t), \gamma''(t))}{\|\gamma'(t)\|^3} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \sinh\frac{t}{a} & \frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a} \end{vmatrix}}{\left(1 + \sinh^2\frac{t}{a}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\frac{1}{a}\cosh\frac{t}{a}}{\cosh^3\frac{t}{a}} = \frac{1}{a\cosh^2\frac{t}{a}}$$

(ג) וקטור הנגזרות הוא:

$$\gamma'(s) = \left(\cos\left(\phi\left(s\right)\right), \sin\left(\phi\left(s\right)\right)\right)$$

ולכן:

$$\|\gamma'(s)\| = \sqrt{\cos^2(\phi(s)) + \sin^2(\phi(s))} = 1$$

וזו אכן פרמטריזציה טבעית.

מכיוון שהפרמטריזציה טבעית, נוכל להשתמש בנוסחה: $k(s) = \|\gamma''(s)\|$.

וקטור הנגזרות השניות הוא:

$$\gamma''(s) = (-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s), \cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))$$

ולכן:

$$k(s) = \sqrt{(-\sin(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2 + (\cos(\phi(s)) \cdot \phi'(s))^2} = \phi'(s)$$

4. נתבונן בפונקציה $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי:

$$\phi(s) = \frac{s^5}{5} + \frac{s^4}{4} + \frac{s^3}{3}$$

לפי הסעיף האחרון בשאלה הקודמת, נקבל שעקמומיותה של העקומה:

$$\gamma(s) = \left(\int_0^s \cos(\phi(u))\, du, \int_0^s \sin(\phi(u))\, du \right)$$

היא $\phi'(s)$, כלומר $s^4 + s^3 + s^2$ כנדרש.