תרגיל 7 – לינארית

1. יהי V מרחב וקטורי מעל F, $\phi \neq A,B \subseteq V$. נגדיר $A+B := \{a+b \mid a\in A, b\in B\}$.
הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1.1 $span(A+B) = span(A) \cup span(B)$

1.2 $span(A\cup B) = span(A) \cup span(B)$

1.3 $span(A+B) = span(A) + span(B)$

1.4 $span(A\cap B) = span(A) \cap span(B)$

2. תהא $A \in M_{m\times n}(R)$ ויהיו $B_R, B_C, B_N, B_{N(A^t)}$ בסיסים למרחבי השורות, העמודות, האפס והאפס השמאלי בהתאמה. הוכיחו כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל R^n וכי $B_C \cup B_{N(A^t)}$ בסיס ל R^m באמצעות הסעיפים הבאים.

2.1 נסמן $B_N = \{w_1,...,w_k\}$, $B_C = \{v_1,...,v_r\}$. הוכיחו כי $r+k=n$ באמצעות הסעיפים הבאים:

2.1.1. הראו כי לכל $1 \le i \le r$ קיים $u_i \in R^n$ כך ש $Au_i = v_i$. בחרו u_i-ים כנ"ל והתבוננו בקבוצה, $B = \{u_1,...,u_r, w_1,...,w_k\}$. הוכיחו כי הקבוצה B בת"ל.
(הדרכה: קחו צירוף לינארי השווה לאפס והפעילו עליו כפל במטריצה A).

2.1.2. הוכיחו כי B מהסעיף הקודם פורשת את R^n.
הדרכה: יהי $v \in R^n$. הציגו את Av בצורה $Av = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i$. הסיקו
ש $\left(v - \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_i\right) \in N(A)$ ולכן הוא צירוף לינארי של אברי B_N.

2.1.3. הסיקו מהסעיפים הקודמים כי $B = \{u_1,...,u_r, w_1,...,w_k\}$ בסיס ל R^n. השתמשו במשפט השלישי חינם להסקת $r+k=n$.

2.1.4. מכיוון ש $|B_R| = |B_C|$ נקבל כי ב $B_R \cup B_N$ יש n איברים (שימו לב כי לפי הסעיף הבא $B_R \cap B_N = \phi$).

2.2 הוכיחו שאם $x \in R(A) \cap N(A)$ אז $x = 0$.
(הדרכה: אם $Ax = 0$ וכן $x = A^t y$, חשבו מה ניתן לקבל באמצעות כפל ב x^t).

2.3 נסמן, $B_N = \{w_1,...,w_k\}$, $B_R = \{h_1,...,h_r\}$. הוכיחו כי $B_R \cup B_N$ בת"ל. (הדרכה: התבוננו בצירוף לינארי השווה לאפס והראו, בעזרת הסעיף הקודם, כי הצירוף הוא צ"ל טריוויאלי).

2.4 לפי משפט השלישי חינם הסיקו כי $B_R \cup B_N$ בסיס ל R^n.

3. יהי V מרחב וקטורי מעל F ונניח כי $B=\{v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס שלו. הוכיחו או הפריכו:

3.1 $\{v_1+v_2,v_2,...,v_n\}$ בסיס של V.

3.2 לכל $\alpha\in F$, $\{\alpha v_1,v_2,...,v_n\}$ בסיס של V.

4. מצאו בסיסים ומימדים לארבעת תתי המרחבים היסודיים של המטריצה:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 & 5 \\ -2 & -3 & 0 & -3 & -5 \\ 2 & 3 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & 3 & 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

5. בכל סעיף, מצאו מטריצה A עם התכונה המתוארת או הוכיחו שלא קיימת מטריצה כזו.

5.1 מרחב העמודה מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ ומרחב השורה מכיל את $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}\right\}$.

5.2 למרחב העמודה בסיס $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$ ולמרחב האפס בסיס $\left\{\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix}\right\}$.

5.3 מימד מרחב האפס גדול באחת ממימד מרחב האפס השמאלי.

5.4 $R(A)=C(A)$ אבל $N(A)\neq N(A^t)$

5.5 $\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ שייך למרחב האפס השמאלי ו $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ שייך למרחב העמודה.

בהצלחה! ☺