תרגול 8 -אושרית

תמונה, תמונה הפוכה, פונקציה שמכבדת יחס שקילות ופונקציות מצומצמות

תחת A

תמונות חלקיות:

הגדרה: תהי $f:X\to Y$ פונק', ותהי $A\subseteq X$. אז - התמונה החלקית של A תחת f (או בקיצור - התמונה של f)

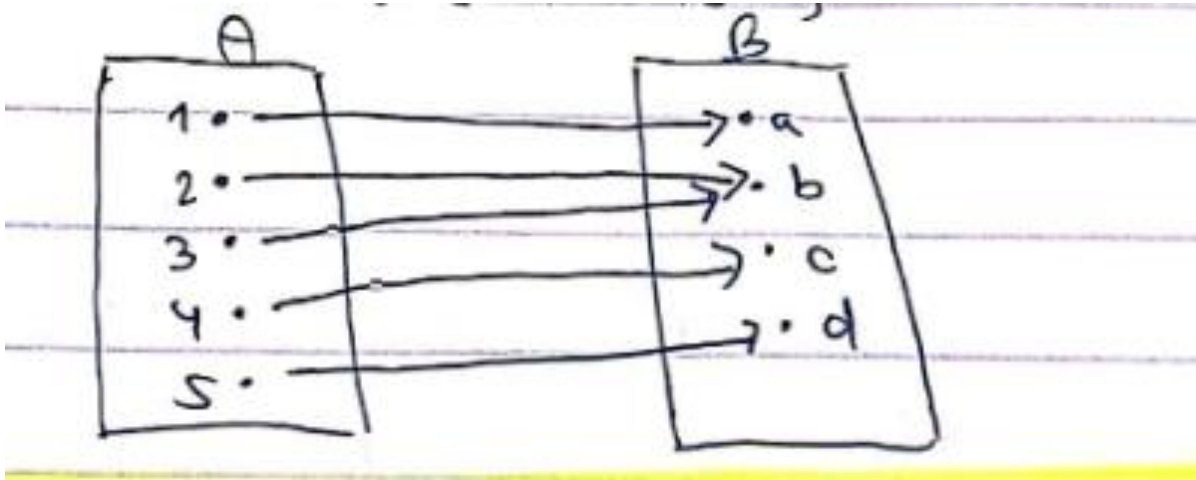
$$f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$$

ה-(א) - תת הקב'

הגדרה: תהי $f:X\to Y$ פונק', ותהי $B\subseteq Y$ אז התמונה החלקית ההפוכה של B תחת f היא תת הקב'

$$f^{-1}(B)=\{a\in X\mid f(a)\in B\}$$

דוג':



מצאו את התמונות והתמונות ההפוכות הבאות:

1. $f[A]$
2. $f[A\setminus\{3\}]$
3. $f^{-1}[B]$
4. $f^{-1}[\{b,c\}]$
5. $f^{-1}[\{b\}]$

תחת A

תמונות חלקיות:

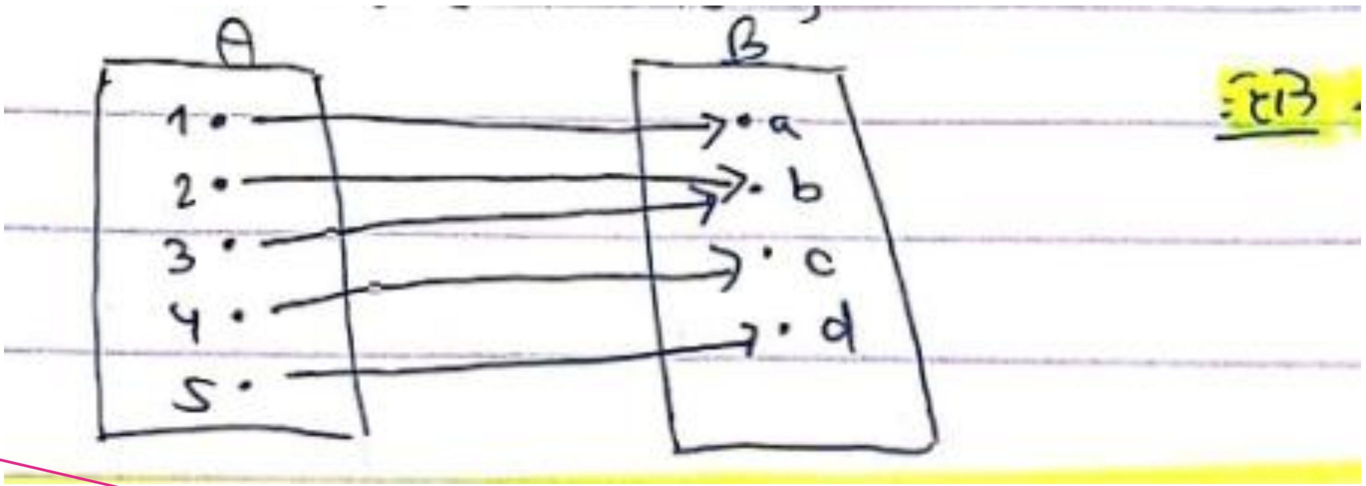
הגד: תהי $f:X\to Y$ פונק', ~~[illegible]~~ ותהי $A\subseteq X$, אז- התמונה החלקית של A תחת f (או בקיצור- התמונה של f)

(ה"ג- תת הקב') $f(A)=\{f(a)|a\in A\}$

הגד: תהי $f:X\to Y$ פונק', ותהי $B\subseteq Y$ אזי התמונה החלקית ההפוכה של B תחת f היא תת הקב'

$f^{-1}(B)=\{a\in X|\ f(a)\in B\}$

דוג:



מצאו את התמונות והתמונות ההפוכות הבאות:

1. $f[A]$
2. $f[A\setminus\{3\}]$
3. $f^{-1}[B]$
4. $f^{-1}[\{b,c\}]$
5. $f^{-1}[\{b\}]$

B

B

A

{2,3,4}

{2,3}

הערה: שימו ♡ להבדל בין $f^{-1}(B)$ לבין הפונק' ההופכית $f^{-1}(y)$

תמונה הפוכה - לא מניחה ש-f הפיכה. הקלט של תמונה הפוכה - הוא קב' ואילו הקלט של פונק' הפיכה: איבר.

דוג' נוספת: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{Z}$ פונק' הערך השלם התחתון. אז: $f^{-1}(\{1\})=[1,2)$

תכונות:

1. אם $A_1\subseteq A_2$ אז $f[A_1]\subseteq f[A_2]$
2. אם $B_1\subseteq B_2$ אז $f^{-1}[B_1]\subseteq f^{-1}[B_2]$

הוכחה:

1. יהי $y\in f[A_1]$ ונרצה להראות כי $y\in f[A_2]$.
מהג' תמונה נקבל כי קיים $a\in A_1$ כך ש- $f(a)=y$.
$A_1\subseteq A_2 \Rightarrow a\in A_2$ ולכן - מהג' תמונה נקבל כי $y\in f[A_2]$ מש"ל

2. יהי $x\in f^{-1}[B_1]$ ונרצה להראות כי $x\in f^{-1}[B_2]$
מהג' תמונה הפוכה נקבל - כי $f(x)\in B_1$ ולכן - $B_1\subseteq B_2 \Rightarrow f(x)\in B_2 \overset{\text{לפי הג' תמונה הפוכה}}{\Rightarrow} x\in f^{-1}[B_2]$.

תרגיל: הוכיחו/הפריכו: תהי $f: X\to Y$ פונק׳, ותהי $A\subseteq B\subseteq Y$ אזי:

1. $f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]=f^{-1}[A\cap B]$
2. $f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]=f^{-1}[A\cup B]$

פתרון:

1. $x\in f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$. **הוכחה**

$\Updownarrow$ לפי הגד׳ תמונה הפוכה ולפי הגד׳ חיתוך

$f(x)\in A \wedge f(x)\in B$

$\Updownarrow$ לפי הגד׳ חיתוך

$f(x)\in A\cap B$

$\Updownarrow$ לפי הגד׳ תמונה הפוכה

$x\in f^{-1}[A\cap B]$

$$\Leftarrow \quad f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}[A]\cap f^{-1}[B]$$

2. יהי $x\in f^{-1}[A\cup B]$ ונרצה לבדוק האם $x\in f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$ **הוכחה**

לפי הג' תמונה הפוכה

$$f(x)\in A\cup B$$

לפי הג' איחוד

$$f(x)\in A \vee f(x)\in B$$

לפי הג' תמונה הפוכה

$$x\in f^{-1}[A] \vee x\in f^{-1}[B]$$

לפי הג' איחוד

$$x\in f^{-1}[A]\cup f^{-1}[B]$$

נשים ♡ - כי כל המעברים הם לפי הג' ולכן - הם ב כיווניים.

תרגיל:

הוכח/הפרך: תהיינה $A,B\subseteq X$ ותהי $f:X\to Y$ אזי- $f[A]\cap f[B]=f[A\cap B]$

דרך פתרון:

② ← $A\cap B\subseteq A$ ולכן- לפי תכונה ① נקבל כי $f[A\cap B]\subseteq f[A]$

$A\cap B\subseteq B$ ולכן- לפי תכונה 1 נקבל כי- $f[A\cap B]\subseteq f[B]$

לכן- סה"כ נקבל כי $f[A\cap B]\subseteq f[A]\wedge f[A\cap B]\subseteq f[B] \Rightarrow f[A\cap B]\subseteq f[A]\cap f[B]$

הכלה בכיוון 1 - מתקיימת.

כעת- נבדוק מה קורה עם ההכלה בכיוון השני:

ננסה: ⊇ ← יהי $x\in f[A]\cap f[B]$ כלומר $x\in f[A]\wedge x\in f[B]$

$\exists a\in A: f(a)=x$ $\quad$ $\exists b\in B: f(b)=x$

יכול להיות שהפונק' לא חח"ע ולכן- $a\neq b$, ולכן- x לא בהכרח ב- F[A∩ B]?

נבנה את דוגמא הנגדית: הפרכה

$f:X\to Y$ כאשר- $X=\{1,2\}$ $Y=\{a\}$, f פונק' קבועה a.

$A=\{1\}$, $B=\{2\}$

$f[A]=\{a\}$ $f[B]=\{a\} \to f[A]\cap f[B]=\{a\}$ $\quad$ $f[A\cap B]=f[\{1\}\cap\{2\}]=f[\emptyset]=\emptyset$

מסקנה: הטענה נכונה אם f חח"ע.

שימו לב- השוויון לא נכון באופן כללי!!!

הוכחת ההערה מהשקופית הקודמת:

תרגיל: f חח"ע $\longrightarrow$ $f[A\cap B]=f[A]\cap f[B]$

פתרון:

$\Leftarrow$ הכלה בכיוון 1 - תמ"ז נכ. את ההכלה בכיוון השני נקח באופן f חח"ע

כי $\exists a\in A: f(a)=x$ $\wedge$ $\exists b\in B: f(b)=x$ f חח"ע לכן $a=b$.

ולכן $x\in f[A\cap B] \Leftarrow a=b\in A\cap B$ לפי הג' תמונה.

תרגיל:

תהי $f:X\to Y$ ותהי $A\subseteq X$ הוכח - $A\subseteq f^{-1}[f[A]]$ וקיים שוויון אם f חח"ע.

פתרון: (1) יהי $a\in A$ ונרצה להראות כי - $a\in f^{-1}[f[A]]$

לפי הגד' תמונה נקבל כי: $f(a)\in f[A]$

נשים ♥ כי $a\in f^{-1}[\{f(a)\}]$ $\{f(a)\}\subseteq f[A] \leftarrow f^{-1}[\{f(a)\}]\subseteq f^{-1}[f[A]]$

לפי תכונה 2

$\leftarrow$ $a\in f^{-1}[f[A]]$ לפי הג' הכלה. מש"ל

הוכחת השיוויון שיעורי בית ☺

תרגיל עזר לתרגיל ממבחן:

תהי $f: X\to Y$ ותהי $A\subseteq Y$. הוכח - $f[f^{-1}[A]]\subseteq A$ וקיים שוויון אם f על.

פתרון:

1 הוכחת ההכלה התמידית: יהי $y\in f[f^{-1}[A]]$ ונרצה להראות ש $y\in A$.

$\downarrow$ מהגדרת תמונה

$\exists x\in f^{-1}[A]: f(x)=y$

$\downarrow$ מהגדרת תמונה הפוכה

$f(x)\in A$

2 נראה שאם f לא על אז לא מתקיים שוויון: הדוגמה: $f:\{1\}\to\{1,2\}$ $f(1)=1$ נגדיר - $B=\{1,2\}$

ומתקיים $f[f^{-1}[B]]=\{1\}\neq\{1,2\}$

3 נראה את ההכלה בכיוון השני אם f על: כלומר - צ"ל: $A\subseteq f[f^{-1}[A]]$

יהי $a\in A$ כיוון ש-f על - קיים $x\in X$ כך ש-$f(x)=a$ לכן - $x\in f^{-1}[A] \Leftarrow a=f(x)\in f[f^{-1}[A]]$

תרגיל מאתגר:

יהיו - X,Y שתי קב', ותהי $f:X\to Y$ פונק'.

נגדיר $g: P(Y) \to P(X)$ ע"י - $g(B)=f^{-1}[B]$

הוכח:

f על $\iff$ g חח"ע

פתרון:

$\Leftarrow$ נניח f על. צ"ל: g חח"ע.

יהיו B_1,B_2 כך ש- $g(B_1)=g(B_2)$ וצ"ל: $B_1=B_2$.

$$f^{-1}[B_1]=f^{-1}[B_2]$$

ומכיוון f על 2 תזכורות וקודם.

$$B_1=f[f^{-1}[B_1]]=f[f^{-1}[B_2]]=B_2$$

לפי תרגיל קודם   לפי תרגיל קודם

$\Leftarrow$ g חח"ע.

$\rightarrow$ נניח g חח"ע. צ"ל: f על.

נניח בשלילה - כי f לא על. כלומר קיים $y\in Y$ כך ש- $f^{-1}[\{y\}]=\emptyset$

כמו כן - ידוע כי $f^{-1}[\emptyset]=\emptyset$ ולכן- $f^{-1}[\{y\}]=f^{-1}[\emptyset]$

$g(\{y\})=g(\emptyset)$

כאשר $\{y\}\neq\emptyset$ ולכן - g לא חח"ע - סתירה!

פונק' מצומצמת:

הג': תהא $f:X\to Y$ ותהי $A\subseteq X$, הפונק' f מצומצמת ל-A מוגדרת ע"י $f|_A: A\to Y$ כך ש- $f|_A(a)=f(a)$

במילים - פונק' זהה לפונק' f רק שהקטנו את התח' שלה רק לקב' A.

דוג': $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}$ $f(x)=x^2$ ← פונק' שאינה חח"ע $f(1)=f(-1)=1$

$f|_{\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ $f(x)=x^2$ ← פונק' חח"ע.

פונקציות המכבדות יחס שקילות:

הגד': תהא $f:A\to B$ ויהא R יחס שקילות על A, אומרים ש-f מכבדת את יחס השקילות אם מתקיים-

$$x_1 R x_2 \longmapsto f(x_1)=f(x_2)$$

דוג': ! $\mathbb{N}/\sim$ כאשר $x\sim y \iff x \bmod 3 = y \bmod 3$

נגדיר את הפונק' $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך ש- $f(x)=2x$

האם f מכבדת יחס שקילות? **לא!**

$3\sim 6 \rightarrow \quad 3 \bmod 3 = 0 = 6 \bmod 3$

אבל-

$f(3)=2\cdot 3=6$

$f(6)=2\cdot 6=12$

ב. $\sim/\mathbb{N}$ זה אוסף מחלקות שקילות של סעיף 1.

נגדיר $f:\mathbb{N}\to\{0,1,2\}$ ונגדיר $f(x)=2x \bmod 3$

נוכיח כי f מכבדת את יחס השקילות.

לכל מחלקה - צ"ל: $2x \bmod 3 = 2y \bmod 3$ צ"ל:

הגדרת השקילות

$$2x \bmod 3 - 2y \bmod 3 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(2x-2y) \bmod 3 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2(x-y) \bmod 3 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$(x-y) \bmod 3 = 0$$
$$\Updownarrow$$

$3|x-y$ מתקיים כי $x \bmod 3 = y \bmod 3$ ✓.

מש"ל

בהצלחה!!!