פתרון תרגיל בית 1 במתמטיקה בדידה 2
83-118 סמסטר ב' תשע"ו

שאלות המסומנות עם $(-)$ הן יותר קלות, ושאלות המסומנות עם $(+)$ הן יותר קשות.

תזכורת סימון מקוצר לסכום הוא

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

שאלה 1. $(-)$ הוכח את התכונה הבאה של סכומים סופיים:

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}$$

פתרון. המטרה של תרגיל זה הייתה להכיר את הסימון של סכום כפול. אנו סוכמים את האיברים בקבוצה

$$\left\{\begin{matrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0m} \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{20} & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{matrix}\right\}$$

בשני סדרים שונים. פעם אחת קודם סוכמים לאורך שורות, ואח"כ לאורך טורים. בפעם השנייה להפך. חיבור מספרים הוא פעולה חילופית, ולכן סדר הסכימה (בסכומים סופיים) אינו משנה.

דרך נוספת להוכיח היא בעזרת אינדוקציה על הזוג הסדור (n, m). בסיס האינדוקציה הוא המקרה $(0, 0)$ שהוא בודאי נכון, הרי $a_{00} = a_{00}$. עבור שלב האינדוקציה, נגדיר עבור תרגיל זה יחס סדר של זוגות סדורים של מספרים טבעיים. נאמר כי $(i, j) < (n, m)$ כאשר $i \le n$, $j \le m$ וגם $(i, j) \neq (n, m)$. נניח את נכונות הטענה לכל הזוגות $(i, j) < (n, m)$ ונוכיח אותה עבור (n, m). אכן

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m} a_{ij} &= \sum_{i=0}^{n}\left(\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} + a_{im}\right) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m-1} a_{ij} + \sum_{i=0}^{n} a_{im} \\ &\overset{*}{=} \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{i=0}^{n} a_{ij} + \sum_{i=0}^{n} a_{im} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{i=0}^{n} a_{ij}\end{aligned}$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה עבור $(n, m-1)$. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל (n, m).

שאלה 2. בתרגול ראינו את הפונקציה $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המוגדרת ברקורסיה באופן הבא: הבסיס: $f(0,0)=1$. וכלל הרקורסיה:

$$f(n,m)=\begin{cases}2f(n-1,m) & \forall n>0,m\geq 0\\ 3f(n,m-1) & \forall n\geq 0,m>0\end{cases}$$

הוכח כי $f(n,m)=2^n3^m$ לכל $n\geq 0,m\geq 0$ טבעיים. (רמז: השתמשו באינדוקציה כפולה: קבעו את אחד המשתנים כפרמטר, ועשו אינדוקציה על השני. בשלב הבא עשו אינדוקציה על המשתנה שקבעתם.)

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה כפולה. נקבע את n כפרמטר, ונראה שלכל $m\in\mathbb{N}$ מתקיים: $f(n,m)=3^mf(n,0)$. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $m=0$. אכן $f(n,0)=3^0f(n,0)$. נניח את נכונות הטענה עבור $m\geq 0$ ונוכיח אותה ל-$m+1$. נשים לב כי

$$f(n,m+1)\overset{*}{=}3f(n,m)\overset{**}{=}3\cdot 3^mf(n,0)=3^{m+1}f(n,0)$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהגדרה הרקורסיבית, ובשיוויון $**$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה. כעת נראה כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $f(n,0)=2^n$. עבור $n=0$, אכן $f(0,0)=1=2^0$. נניח נכונות ל-n ונראה עבור $n+1$:

$$f(n+1,0)\overset{*}{=}2f(n,0)\overset{**}{=}2\cdot 2^n=2^{n+1}$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהגדרה הרקורסיבית, ובשיוויון $**$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה. בסה"כ מתקיים:

$$f(n,m)=3^mf(n,0)=3^m2^n=2^n3^m$$

שאלה 3. הוכח בעזרת אינדוקציה כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים

$$\sum_{i=1}^{n}i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n=0$. אכן $0=\frac{0(0+1)(2\cdot 0+1)}{6}$ (הסכום הריק הוא 0). שימו לב שבאגף שמאל ניתן לסכום החל מ-0, כי תוספת 0^2 לא משנה את התוצאה.

נניח את נכונות הטענה עבור $n\geq 0$ ונוכיח אותה ל-$n+1$. נחשב

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1}i^2&=\sum_{i=1}^{n}i^2+(n+1)^2\overset{*}{=}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\&=\frac{n(n+1)(2n+1)+6\left(n+1\right)^2}{6}=\frac{(n+1)\left(n(2n+1)+6(n+1)\right)}{6}\\&=\frac{(n+1)\left(2n^2+n+6n+6\right)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}\end{aligned}$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל n.

שאלה 4. תהי המטריצה $M = \left(\begin{smallmatrix} a & 0 \\ 1-a & 1 \end{smallmatrix}\right)$, כאשר $a \in \mathbb{N}$ פרמטר כלשהו. הוכח בעזרת אינדוקציה כי לכל $n \in \mathbb{N}$ מתקיים

$$M^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 1-a^n & 1 \end{pmatrix}$$

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n=0$. אכן $M^0 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ (מטריצת היחידה). נניח את נכונות הטענה עבור $n-1 \geq 0$ ונוכיח אותה ל-n. נחשב

$$M^n = M^{n-1}M \stackrel{*}{=} \begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ 1-a^{n-1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 1-a^n & 1 \end{pmatrix}$$

כאשר בשיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל n.

שאלה 5. תהא סדרה המוגדרת לפי

$$a_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$$

הוכח באינדוקציה כי מתקיים

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n < \frac{2n}{5n+1}$$

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n=1$. אכן $a_1 = \frac{1}{6} < \frac{2}{6}$. נניח את נכונות הטענה עבור $n-1 \geq 1$ ונוכיח אותה ל-n. נחשב תחילה בדרך לא מוצלחת:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n-1} a_i + a_n \stackrel{*}{<} \frac{2(n-1)}{5(n-1)+1} + \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{2(n-1)(5n+1)+1}{(5n-4)(5n+1)}$$
$$= \frac{10n^2-8n-1}{(5n-4)(5n+1)} =?$$

כאשר באי השיוויון $*$ השתמשנו בהנחת האינדוקציה. ישנה בעיה להשוות את התוצאה שקיבלנו לאגף ימין בטענה המקורית. בבדיקה של הטענה לכמה ערכים של n, אפשר לשים לב שלו היינו מנסים חסם קטן יותר, ספציפית $\frac{n}{5n+1}$, היינו יכולים להצליח להוכיח את הטענה.

הפעם ננסה לחשב בשיטה יותר ישירה עם הגדרת הסדרה. נשים לב כי שישנו פירוק לשברים חלקיים

$$a_n = \frac{1}{(5n-4)(5n+1)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n+1}\right)$$

(אפשר לגלות זאת גם עם בדיקת הסכום $a_{n-1} + a_n$, אחר כך $a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$ וכו') ולקבל סכום טלסקופי

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5i-4} - \frac{1}{5i+1}\right) = \frac{1}{5}\left(\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{5i+1} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{5i+1}\right)$$
$$= \frac{1}{5}\left(\frac{1}{5\cdot 0+1} - \frac{1}{5n+1}\right) = \frac{1}{5}\cdot\frac{5n}{5n+1} = \frac{n}{5n+1} < \frac{2n}{5n+1}$$

שימו לב שאנו משתמשים בעקרון האינדוקציה המתמטית בסכימה של סכום טלסקופי $\sum_{i=1}^{n}(f(i)-f(i-1)) = f(n)-f(0)$.

שאלה 6 (אי־שיוויון ברנולי). יהי $x > 0$ מספר ממשי. הוכח כי לכל מספר טבעי $n \geq 2$ מתקיים $(1+x)^n > 1+nx$.

פתרון. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n = 2$. אכן $(1+x)^2 = 1+2x+x^2 > 1+2x$ כי $x > 0$.

נניח את נכונות הטענה עבור $n-1 \geq 2$, כלומר $(1+x)^{n-1} > 1+(n-1)x$. נוכיח את הטענה ל-n. נחשב

$$(1+x)^n = (1+x)(1+x)^{n-1} > (1+x)(1+(n-1)x) = 1+nx+(n-1)x^2 > 1+nx$$

ולפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל $n \geq 2$.

שאלה 7. $(+)$ נגדיר סדרה באופן רקורסיבי לפי $a_0 = \sqrt{3}$, $a_n = \sqrt{3+a_{n-1}}$ עבור $n \in \mathbb{N}$.

1. הוכח באינדוקציה כי הסדרה a_n מונוטונית עולה.
2. הוכח באינדוקציה כי הסדרה a_n חסומה מלמעלה: $a_n < \sqrt{3}+1$ לכל n.

פתרון. 1. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n = 1$. אכן $a_1 = \sqrt{3+\sqrt{3}} > \sqrt{3} = a_0$. כעת נניח את נכונות הטענה עבור $n \geq 1$, כלומר $a_n > a_{n-1}$. נוכיח כי $a_{n+1} > a_n$. לפי הנחת האינדוקציה ברור כי $a_n + 3 > a_{n-1} + 3$, וגם $\sqrt{a_n+3} > \sqrt{a_{n-1}+3}$. לפי הגדרת הסדרה בעצם קיבלנו כי $a_{n+1} > a_n$. לפי עקרון האינדוקציה המתמטית, הטענה נכונה לכל $n \geq 1$, והסדרה מונוטונית עולה.

2. נוכיח בעזרת אינדוקציה על n. בסיס האינדוקציה הוא המקרה $n = 0$. אכן $a_0 = \sqrt{3} < \sqrt{3}+1$. כעת נניח את נכונות הטענה עבור $n \geq 0$, ונוכיח אותה עבור $n+1$. לפי הנחת האינדוקציה $a_n < \sqrt{3}+1$, אזי

$$a_{n+1} = \sqrt{3+a_n} < \sqrt{3+\sqrt{3}+1} < \sqrt{3+2\sqrt{3}+1} = \sqrt{\left(\sqrt{3}+1\right)^2} = \sqrt{3}+1$$

כלומר הראנו בעזרת עקרון האינדוקציה המתמטית, כי הסדרה חסומה מלמעלה על ידי $\sqrt{3}+1$.

העשרה קרא את ערכי ויקיפדיה על אוקלידס ועל קרל פרידריך גאוס.

בהצלחה!