הגדרה

משוואת בסל מסדר ∞

ראינו ש

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \nu^2\right) y = 0$$

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0$$

אם x גדול מאוד, $y'' + y \approx 0$, ולכן אם $x \to 0$ אז $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$
פונקציה $f(t)$ נקראת פונקציה מאיפוס מעריכי אם קיימים קבועים $M, \alpha \geq 0$ כך ש$|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$.

שאלה האם קיימת התמרת לפלס $\mathcal{L}\left\{J_\infty(t)\right\}$?

משוואת בסל מסדר 0

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

$$xy'' + y' + xy = 0$$

הפתרון

$$y = C_1J_0(x) + C_2Y_0(x)$$

שאלה ממבחן

אם הפונקציה $f(t)$ פותרת את המשוואה $tf''(t) + f'(t) + tf(t) = 0$, הוכח שהתמרתה, $F(s)$, פותרת את המשוואה $\left(1+s^2\right)F' + sF = 0$

פתרון

$$\mathcal{L}\left\{t \cdot g(t)\right\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G(s)$$

$$\mathcal{L}\left\{tf''(t) + f'(t) + tf(t)\right\} = \mathcal{L}\left\{0\right\} = 0$$

$$\mathcal{L}\left\{tf''\left(t\right)\right\}+\mathcal{L}\left\{f'\left(t\right)\right\}+\mathcal{L}\left\{tf\left(t\right)\right\}=0$$

$$...$$

$$-\left(2sF+s^{2}F'-f\left(0\right)\right)+sF-f\left(0\right)-F'=0$$

$$-\left(1+s^{2}\right)F'-sF=0\Rightarrow\left(1+s^{2}\right)F+sF=0$$

$$\left(1+s^{2}\right)F'=-sF$$

$$\left(1+s^{2}\right)\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}s}=-sF$$

$$\int\frac{\mathrm{d}F}{F}=\int\frac{-s}{1+s^{2}}\mathrm{d}s$$

$$\ln F=-\frac{1}{2}\left(1+s^{2}\right)+C$$

$$\ln F=\ln\left(1+sy^{-\frac{1}{8}}\right)+C$$

$$F=\frac{1}{\sqrt{1+s^{2}}}$$

הערה $Y_{0}\left(t\right)$ אינה מוגדרת ב$t=0$ ולכן היא לא שורדת את התמרת לפלס.

מסקנה מהתרגיל

- לפונקציות $J_{0},J_{1},...$ אפשר לעשות לפלס.
- הפונקציות $Y_{0},Y_{1},...$ מסוכנות.

הבהרות שונות

המשפט היסודי של של האינפי קובע ש$F\left(x\right)=\int_{x_{0}}^{x}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t$ הוא פונקציה קדומה של $f\left(x\right)$ לכל x_{0} קבוע(אם f רציפה), כלומר

$$F'\left(x\right)=\frac{d}{dx}\int_{x_{0}}^{x}f\left(t\right)\,\mathrm{d}t=f\left(x\right)$$

חשוב לציין שלא כל הפונקציות הקדומות של $f\left(x\right)$ הן מהצורה הזו.

למשל: $f(x)=e^x$. כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$ נתונות ע"י אינטגרל לא מסויים

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int e^x\,\mathrm{d}x=e^x+c,\qquad c\in\mathbb{R}$$

בעוד ש

$$\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{x_0}^{x} e^t\,\mathrm{d}t=e^t\Big|_{t=x_0}^{t=x}=e^x-e^{x_0}$$

ולכן אלו רק פונקציות קדומות מהצורה e^x+C עם C שלילי ולא $e^{x_0}>0$ כולן!

כדי לקבל את כל הפונקציות הקדומות נוסיף קבוע ממשי חופשי

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t+K\qquad K\in\mathbb{R}$$

משפט הפירוק לשברים חלקיים

מעל $\mathbb{R}$: תהי $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ פוקנציה רציונלית[1] עם $\deg P<\deg Q$. נניח ש$Q(X)$ הוא פולינום מתוקן[2](תמיד אפשר לסדר את זה) ושהוא מהצורה

$$Q(x)=(x-a_1)^{j_1}\cdots(x-a_m)^{j_m}\cdot\left(x^2+b_1x+c_1\right)^{k_1}\cdots\left(x^2+b_nx+c_n\right)^{k_n}$$

כאשר:

- $a_1,...a_m,b_1,...b_n,c_1,...c_n$ קבועים ממשיים ו$j_1,...j_m,k_1,...k_m$ הם מספרים טבעיים.
- הגורמים $(x-a_i)$ הם הגורמים הליניאריים של $Q(x)$ שמתאימים לשורשים הממשיים שלו.
- הגורמים $\left(x^2+b_ix+c_i\right)$ הם גורמים ריבועיים אי־פריקים של $Q(x)$ שמתאימים לשורשים מרוכבים צמודים.

אזי מתקיים

$$f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{j_i}\frac{A_{ir}}{(x-a_i)^r}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{r=1}^{k}\frac{B_{ir}x+C_{ir}}{(x^2+b_ix+c)^r}$$

כאשר A_{ir},B_{ir},C_{ir} קבועים שיש למצוא.

מעל $\mathbb{C}$: תהי $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ פ"ר עם $\deg P<\deg Q$. נניח ש$Q(x)$ הוא פולינום מתוקן ושהוא מהצורה $Q(x)=(x-\alpha_i)^{j_i}\cdots(x-\alpha_m)^{j_m}$ כאשר $\alpha_1,...\alpha_m$ קבועים מרוכבים, אזי $f(x)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{r=1}^{j_i}\dfrac{A_{ir}}{(x-\alpha_i)^r}$

[1]פונקציה רציונלית היא פולינום חלקי פולינום

[2]פולינום מתוקן הוא פולינום שהמקדם של האיבר בעל החזקה הגדולה ביותר שלו היא 1

בעייה

אם $\deg P \geq \deg Q$

פתרון

ע"י חילוק פולינומים עם שארית. לדוגמה $\frac{x^3}{x^2-1} = x + \frac{x}{x^2-1}$.

שאלות ממבחן - מועד ב' סמסטר א' תשע"א

שאלה 4

(א) מצא את הפתרון הכללי של המערכת $y' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \vec{y}$

(ב) מצא פתרון פרטי של המערכת $\vec{y}' = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} \vec{y} + g(t) \begin{pmatrix} 2\sin t \\ \cos t + 3\sin t \end{pmatrix}$ כאשר $g(t)$ היא פונקציה נתונה.

פתרון(א)

נמצא ע"ע:

$$\det(\lambda I - A) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\det \begin{pmatrix} \lambda+3 & -2 \\ 5 & \lambda-3 \end{pmatrix} = 0$$

$$(\lambda+3)(\lambda-3) + 10 = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\boxed{\lambda_{1,2} = \pm i}$$

נמצא ו"ע:

עבור $\lambda_1 = i$

$$(\lambda, I - A)\vec{v}_1 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3+i & -2 \\ 5 & i-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(3+i)a - 2b = 0$$

$$b = \frac{3+i}{a} \cdot a$$

$$\Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{pmatrix} a \\ \frac{3+i}{2} a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3+i}{2} \end{pmatrix}$$

ניקח לנוחיותינו $a = 2$, ונקבל ו"ע $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix}$., ומכאן פתרון

$$\vec{v}_1 e^{\lambda_1 t} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{i \cdot t}$$

החלק הממשי והמדומה יתנו 2 פתרונות בת"ל:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix} e^{it} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3+i \end{pmatrix} (\cos t + i \sin t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix}}_{\vec{y}_1} + i \underbrace{\begin{pmatrix} 2\sin t \\ 3\sin t - \cos t \end{pmatrix}}_{\vec{y}_2}$$

הפתרון הסופי הוא

$$\boxed{\vec{y} = C_1 \begin{pmatrix} 2\cos t \\ 3\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2\sin t \\ 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}}$$

פתרון(ב)

נבנה מטריצה יסודית

$$Y = \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\sin t \\ 3\cos t - \sin t & 3\sin t + \cos t \end{pmatrix}$$

הנוסחה לפתרון מערכת אי הומוגנית היא $y = Y\alpha(t) = Y \int Y^{-1} b(t)\, \mathrm{d}t$, ובמקרה שלנו זה יוצא

$$= \int \begin{pmatrix} 2\cos t & 2\sin t \\ 3\cos t - \sin t & 3\sin t \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3\sin u + \cos u & -2\sin u \\ \sin u - 3\cos u & 2\cos u \end{pmatrix} g(u) \begin{pmatrix} 2\sin u \\ \cos u + 3\sin u \end{pmatrix} \mathrm{d}u$$

שאלה 1

מצא את הפתרון הכללי של המשוואה

$$y' - ay = xe^{bx} \qquad a \neq b$$

(א) ע"י ההצגה $y(x) = z(x)e^{ax}$

(ב) ע"י שיטת התמרת לפלס.

פתרון(א)

ע"פ ההצגה $y=ze^{ax}$, $y'=z'e^{ax}+aze^{ax}$. נציב במד"ר

$$z'e^{ax}+\cancel{aze^{ax}}-\cancel{aze^{ax}}=xe^{bx}$$

$$z'e^{ax}=xe^{bx}$$

$$z'=xe^{(b-a)x}$$

$$z=\int xe^{(b-a)x}\,\mathrm{d}x \overset{\begin{bmatrix} u=x & v=\frac{e^{(b-a)x}}{b-x} \\ u'=1 & v'=e^{(b-a)x}\end{bmatrix}}{=} \frac{xe^{(b-a)x}}{b-a}=\int\frac{e^{(b-a)x}}{(b-a)}\mathrm{d}x=\frac{xe^{(b-a)x}}{b-a}-\frac{e^{(b-a)x}}{(b-a)^2}+C$$

$$y=z\cdot e^{ax}=\frac{xe^{bx}}{b-a}-\frac{e^{bx}}{(b-a)^2}-Ce^{ax}$$

פתרון(ב)

לפני שנפתור, נעשה הצבה טריוויאלית $\begin{matrix} t=x \\ \frac{d}{dt}=\frac{d}{dx}\end{matrix}$.

$$y'-ay=te^{bt}$$

$$\mathcal{L}\left\{y'-ay\right\}(s)=\mathcal{L}\left\{te^{bt}\right\}(s)$$

$$sY-y(0)-aY=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{e^{bt}\right\}(s)$$

$$(s-a)Y-y(0)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathcal{L}\left\{e^{bt}\right\}(s)$$

$$(s-a)Y-y(0)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\frac{1}{s-b}=\frac{1}{(s-b)^2}$$

$$\Rightarrow y=ze^{ax}=\frac{xe^{bx}}{b-a}-\frac{e^{bx}}{(b-a)^2}+Ce^{ax}$$

$$(s-a)Y=y(0)+\frac{1}{(s-b)^2}$$

$$Y = \frac{y\left(0\right)}{s-a} + \frac{1}{\left(s-b^2\right)\left(s-a\right)}$$

נקרא ל$y\left(0\right)$ "C"

ע"פ המשפט לפירוק לשברים חלקיים

$$\frac{1}{\left(s-a\right)\left(s-b\right)^2} = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{\left(s-b\right)^2}$$

$$1 = A\left(s-b\right)^2 + B\left(s-a\right)\left(s-b\right) + C\left(s-a\right)$$

$$0s^2 + 0s + 1 = \left(A+B\right)s^2 + \left(-2Ab - aB - bB + C\right)s + Ab^2 + abB - ac$$

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

$$\left(a-b\right)A + C = 0 \Rightarrow C = \left(b-a\right)A$$

$$Ab^2 - abA + a\left(a-b\right)A = 1$$

$$\left(a-b\right)^2 A = 1$$

$$A = \frac{1}{\left(a-b\right)^2}$$

$$B = -\frac{1}{\left(a-b\right)^2}$$

$$C = \frac{1}{b-a}$$

$$\frac{1}{\left(s-a\right)\left(s-b\right)^2} = \frac{1}{\left(s-b\right)^2}\frac{1}{s-a} - \frac{1}{\left(s-b\right)^2}\frac{1}{s-b} + \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\left(s-b\right)^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(a-b\right)^2} \cdot \frac{1}{s-a}\right\} = \frac{1}{\left(a-b\right)^2}e^{at}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(a-b\right)^2} \cdot \frac{1}{s-a}\right\} = \frac{1}{\left(a-b\right)^2}e^{bt}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{\left(s-b\right)^2}\right\} = \frac{1}{b-a}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\left(s-b\right)^2}\right\} = \frac{1}{b-a}te^{bt}$$

$$y=\mathcal{L}^{-1}\left\{Y\right\}=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{y\left(0\right)}{s-a}+\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}\cdot\frac{1}{s-b}-\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}\cdot\frac{1}{s-b}+\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{\left(s-b\right)^{2}}\right\}=$$

$$=Ce^{at}+\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}e^{dt}-\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}e^{bt}+\frac{1}{b-a}te^{bt}$$

$$\boxed{Ae^{at}-\frac{1}{\left(a-b\right)^{2}}e^{bt}+\frac{1}{b-a}te^{bt}}$$

שאלה 6

למשוואה $x^{2}y''-x\left(x+2\right)y'+\left(x+2\right)y=0$

(א) בהנתן ש$y=x$ פתרון, מצא את הפתרון הכללי.

(ב) מצא את הפתרון הכללי ע"י שיטת פרוביניוס.

פתרון(א)

$$y=x\cdot z$$

$$y'=z+xz'$$

$$y''=xz''+2z'$$

$$x^{2}\cdot\left(xz''+2z'\right)-x\left(x+2\right)\left(z+xz'\right)+\left(x+2\right)xz=0$$

$$x^{3}z''+\left(2x^{2}-x^{3}-2x^{2}\right)+\left(-x^{2}-2x+x^{2}+2x\right)z=0$$

$$x^{3}z''-x^{3}z'=0$$

$$z''=z'$$

$$w:=z'$$

$$w'=w$$

$$w=ce^{x}=z'$$

$$z' = C_1 e^x$$

$$z = \int C_1 e^x \,\mathrm{d}x = C_1 e^x + C_2$$

$$\boxed{y = x \cdot z = C_1 x e^x + C_2 x}$$

פתרון(ב)

נחפש פתרון בצורה $y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda}$ (טור פרוביניוס)

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)\, a_n x^{n-\lambda-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)\, a_n x^{n+\lambda-2}$$

נציב:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)(n+\lambda-1)\, a_n x^{n+\lambda} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda)\, a_n x^{n+\lambda+1}$$

$$\underbrace{-\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+\lambda)\, a_n x^{n+\lambda}}_{-2xy'} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda+1}}_{xy} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n x^{n+\lambda}}_{2y} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) - 2(n+\lambda) + 2\right] a_n x^{n+\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - (n+\lambda)\right] a_n x^{n+\lambda+1} = 0$$

נוציא $n = 0$ מחוץ לסכימה:

$$(\lambda(\lambda-1) - 2\lambda + 2)\, a_0 x^{\lambda} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(n+\lambda)(n+\lambda-1) - 2(n+\lambda) + 2\right] a_n x^{n+\lambda}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - (n+\lambda)\right] a_n x^{n+1} =$$

$$= \left(\lambda^2 - 2\lambda + 2\right) a_0 x^{\lambda} + \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+\lambda+1)(n+\lambda) - 2(n+\lambda+1) + 2\right] a_{n+1} x^{n+\lambda+1}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \left[1 - (n+\lambda)\right] a_n x^{n+\lambda+1} =$$

$$= \left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) a_0 x^\lambda + \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left[(n+\lambda+1)(n+\lambda) - 2(n+\lambda+1) + 2\right] a_{n+1} + \left[1 - (n+\lambda)\right] a_n \right\} x^{n+\lambda+1} = 0$$

כל המקדמים שווים אפס!

המקדם של x^λ:

$$\left(\lambda^2 - 3\lambda - 2\right) a_0 = 0$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{1}}{2} = 2, 1$$

שאר המקדמים:

$$\left[(n+\lambda+1)(n+\lambda) - 2(n+\lambda+1) + 2\right] a_{n+1} + \left[1 - (n+\lambda)\right] a_n = 0$$

כלומר

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{n+2}, n = 0, 1, 2, ...$$

$$n = 0 \qquad a_1 = \frac{a_0}{2}$$

$$n = 1 \qquad a_2 = \frac{a_1}{3} = \frac{a_0}{2 \cdot 3}$$

$$n = 2 \qquad a_3 = \frac{a_2}{4} = \frac{a_0}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{a_0}{(n+1)!}$$

נקבל פתרון פרטי:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+\lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_0}{(n+1)!} x^{n+2} = x \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \cdot \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} =$$

$$= x \cdot a_0 \left(e^x - 1\right) = a_0 x e^x - a_0 x$$

ניקח $a_0 = 1$: $xe^x - x = y_1$ ־ פתרון פרטי. כדי להגיע לפתרון נוסף יש לעשות הורדת סדר ל $y = (xe^x - x) \cdot z$