

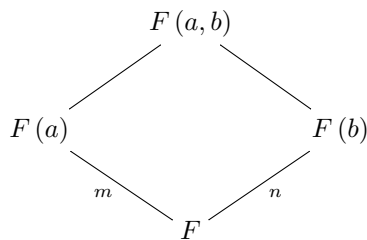
תזכורת

משפט: יהיו $F \subset K \subset E$ שדות. אזי $[E : F] = [E : K][K : F]$

תרגיל

אם $a, b \in E \setminus F$ כך ש $\begin{cases} [F(a) : F] = m \\ [F(b) : F] = n \end{cases}$, אזי $(m, n) = 1$ גורר $[F(a, b) : F] = m \cdot n$.

פתרון



$$[F(a, b) : F] = [F(a, b) : F(a)][F(a) : F] = m \cdot [F(a, b) : F(a)] =$$

$$= [F(a, b) : F(b)] \cdot [F(b) : F] = n \cdot [F(a, b) : F(b)]$$

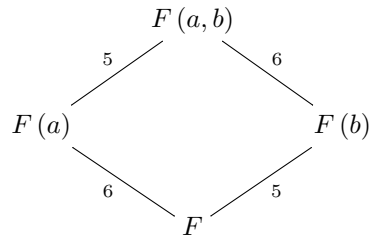
לכן $[F(a, b) : F] \mid mn$ ומכיון ש m, n זרים $\iff mn \mid [F(a, b) : F]$ ולכן קיים פולינום מינימלי g מעל F שהוא מדרגה n . נסמן אותו $g_b(x) = 0$. הפולינום $g_b \in F(a)[x] \iff g_b \in F[x]$ ולכן דרגת הפולינום המינימלי של b מעל $F[a]$ היא לכל היותר n .
 $\iff [F[a, b) : F] \leq m \cdot n \iff (F(a, b) = F(a)(b))[F(a, b) : F(a)] \leq n$
 $[F(a, b) : F] = mn$

תרגיל

$a \in E \setminus F$ נתון $\deg f = 6, \deg g = 5$. $f(x), g(x) \in F[x]$ פולינומים אי-פריקים כך ש f הוא שורש של f . הוכיחו או הפריכו: $g(a) \in F$.

פתרון

ניתן להניח שב E יש שורש של $g(x)$: $b \in E$ כך ש $g(b) = 0$.



לפי התרשים והתרגיל הקודם הפולינום המינימלי של b מעל $F(a)$ הוא מדרגה 5. אבל $g(x)$ הוא פולינום כזה ולכן הוא אי־פריק.

תרגיל

עם פולינום מינימלי $m_u(x) = x^n - a$ מעל F .
יהי $m \in \mathbb{N}$. מצאו את הפולינום המינימלי של u^m (נסמן $m_{u^m}(x)$).

פתרון

שלב א: נניח ש $m \mid n$.

$$0 = m_u(u) = u^n - a = (u^m)^{n/m} - a$$

$$\deg m_{u^m} \leq \frac{n}{m} \iff u^m \text{ שמאפס את } f(x) = x^{n/m} - a$$

נניח ש $g(x) = x^t + \dots$, $t < \frac{n}{m}$, מאפס את u^m . אזי

$$0 = g(u^m) = u^{mt} + \dots$$

$mt < n$ בסתירה למינימליות m_u .

$$\implies \deg m_{u^m} = \frac{n}{m}$$

$$m_{u^m} = x^{n/m} - a$$

שלב ב: m כללי.

$$d = (m, n) \quad d \mid n$$

$$m_{u^d} = x^{\frac{n}{d}} - a$$

$$m_{u^d}(u^m) = u^{\frac{mn}{d} - a} = (u^n)^{m/d} - a = a^{m/d} - a$$

$$f(x) = x^{n/d} - a^{m/d}$$

$$f(u^m) = 0$$

$$\deg m_{u^m} \leq \frac{n}{d}$$

. $d = ms + nt$ כן $s, t \in \mathbb{Z}$ קיימים

$$F(u^m) = F(u^d)$$

$$u^m = (u^d)^{m/d} \in F[u^d]$$

$$\implies F(u^m) \subseteq F(u^d)$$

$$u^d = u^{ms+nt} = \underbrace{u^{ms}}_{\in F(u^m)} \cdot \underbrace{u^{nt}}_{a^t \in F} \in F(u^m)$$

$$\implies F(u^b) \subseteq F(u^m)$$

$$\implies F(u^b) = F(u^m)$$

$$[F(u^m) : F] = [F(u^d) : F] = \frac{n}{d}$$

$$\implies m_{u^m} = x^{n/d} - a^{m/d}$$

■