אלגברה לינארית 2 (88113) – תשובות לבחינה (מועד ב׳)

מרצים: פרופ׳ רון עדין, פרופ׳ בוריס קוניאבסקי.
מתרגלים: עופר בוסאני, שירה גילת, עדי לוגסי, תמר נחשוני.

בהצלחה !

פרק א׳

1.

א.

ב. בא״נ עבור V: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

בא״נ עבור W_1: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

בא״נ עבור W_2: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

ג. בא״נ עבור W_3: $\left\{\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\right\}$

בא״נ עבור W_4: $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$

ד. הטלה ניצבת של A על W_1: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&3\end{pmatrix}\right\}$

הטלה ניצבת של A על W_2: $\left\{\begin{pmatrix}-1&2i\\3i&1\end{pmatrix}\right\}$

הטלה ניצבת של A על W_3: $\left\{\begin{pmatrix}0&2i\\4i&0\end{pmatrix}\right\}$

הטלה ניצבת של A על W_4: $\left\{\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}\right\}$

2. יהי V כמו בשאלה 1א. נגדיר אופרטור לינארי $T:V\to V$ ע״י

$$T(A):=A+iA^t \qquad (\forall A\in V)$$

א. עבור הבא״נ (הסטנדרטי) של V מסעיף 1ב, המטריצה המייצגת את T היא

$$\begin{pmatrix}1+i&0&0&0\\0&1&i&0\\0&i&1&0\\0&0&0&1+i\end{pmatrix}$$

ב. המטריצה המייצגת את T^* בבסיס הנ״ל:

$$\begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 \\ 0 & -i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix}$$

נוסחה מפורשת: $(\forall A\in V) \quad T^*(A)=A-iA^t$.

ג. T נורמלי.

ד. הפולינום האופייני: $(x-1-i)^3(x-1+i)$.

הפולינום המינימלי: $(x-1-i)(x-1+i)=x^2-2x+2$.

ה. T ניתן לשילוש וללכסון.

ו. T ניתן לשילוש אוניטרי וללכסון אוניטרי.

<u>פרק ב'</u>

3.

א. <u>נכון.</u> A ניתנת ללכסון, עם ע"ע $-1,1,0$, ולכן A ניתנת ללכסון עם ע"ע $1,0$.

ב. <u>נכון.</u> A לא ניתנת ללכסון, ולכן יש לה בלוק ז'ורדן יחיד, עם ע"ע יחיד. ע"ע זה הוא i או $-i$, ולכן $\det(A)=-1$.

ג. <u>לא נכון.</u> למשל $A^2=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

4.

א. $A=\begin{pmatrix} -2 & a & 0 & 0 \\ 0 & -2 & b & -b \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

ב. $a=0$.

ג. למשל $P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & -b \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad D=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

5.

א. באי"נ עבור W: למשל $\left\{\frac{1}{2}(1,i,1+i),\frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0)\right\}$.

ב. וקטור שלישי: למשל $\frac{1}{2}(1,i,-1-i)$.

ג. ההטלה של $v=(0,1,-1)\in V$ על W: $\frac{1}{4}(-1+2i,2-i,-1-i)$.