88165 – תרגיל 9

.1

יהיו X_1 ו- X_2 מ"מ מעריכים עם הפרמטרים λ_1 ו- λ_2 בהתאמה, וב"ת.

מצא/י את פונקצית התפלגות המצטברת של $Z = X_1/X_2$. כמו כן, חשב /י את $P(X_1 < X_2)$.

.2

אם Z הוא משתנה מקרי נורמלי סטנדרטי, חשב את $\mathrm{Cov}(Z, Z^2)$

.3

יהי X משתנה מקרי אחיד בקטע $(0,1)$ ויהי Y משתנה מקרי מעריכי עם פרמטר $\lambda = 1$.

בהנחה ש-X ו-Y בלתי-תלויים, מצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של

(א) $Z = X + Y$

(ב) $Z = X|Y$

4. נתון $X \sim U[0,1]$, מצאו את ההתפלגות של $Y = \lfloor nU \rfloor + 1$ כאשר $\lfloor x \rfloor$ הוא הערך השלם (עיגול כלפי מטה) של x .

5. יהיה X מ"מ בדיד המקבל ערכים שלמים אי שליליים בלבד. נגדיר את **פונקצית הסיכון** של X כך: $h(r) = P(X = r \mid X \geq r)$.

יהיו $U_1, U_2, \ldots$ מ"מ ב"ת המתפלגים באופן אחיד על הקטע $[0,1]$. הוכיחו כי המ"מ $Z := \min\{n \mid U_n \leq h(n)\}$ הוא בעל אותה התפלגות כמו X .

6.**אנטרופיה.** מחלקים את הקטע $[0,1]$ ל n קטעים שונים (שחיתוך כל שניהם מהם ריק ואיחודם הוא $[0,1]$). אורך הקטע ה i הוא p_i כאשר נתונה הסדרה $p_1, p_2, \ldots$. **האנטרופיה** של חלוקה זו מוגדרת כך

$$h = -\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \ .$$

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת המתפלגים באופן אחיד על הקטע $[0,1]$. נסמן ב $Z_m(i)$ את מספר המשתנים מתוך $X_1, X_2, \ldots, X_m$ אשר ערכם התקבל בתוך הקטע ה i של החלוקה.

הוכיחו כי עבור סדרת המ"מ $R_m = \prod_{i=1}^{n} p_i^{Z_m(i)}$ מתקיים $P\left(m^{-1} \log R_m \xrightarrow{m\to\infty} -h\right) = 1$. רמז: חוק המספרים הגדולים.