

## מופשטת 1- תרגיל 13

1. מצאו סדרת הרכב ל- $D_4$ . הסיקו ש  $D_4$  פתירה.
2. הוכיחו/הפריכו:
  - א. כל חבורה מסדר 1089 היא פתירה.
  - ב. כל חבורה מסדר 60 היא פתירה.
3. ענו על הסעיפים הבאים:
  - א. תהי  $G$  חבורה בת 35 איברים, הוכיחו כי  $G$  פתירה.
  - ב. תהי  $G$  חבורה בת 125 איברים. האם בהכרח  $G$  פתירה?
4. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)  
על הקבוצה  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times$  נגדיר את הפעולה הבאה:  $(a_1, b_1) \cdot (a_2, b_2) = (a_1 + b_1 a_2, b_1 b_2)$ . הוכיחו:
  - א.  $G = (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^\times, \cdot)$  חבורה.
  - ב.  $G$  אינה אבלית.
  - ג. קיים מונומורפיזם  $G \rightarrow GL_2(\mathbb{R})$ .
  - ד.  $G$  חבורה פתירה. רמז: השתמשו בסעיף הקודם ובחישוב קומוטטורים.
5. (שאלה ממבחן מועד א', קיץ 2006)  
נסמן  $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$  הקומוטטור של  $a, b \in G$  בחבורה  $G$ . נגדיר  $G' = \langle \{[a, b] \mid a, b \in G\} \rangle$  תת החבורה שנוצרת ע"י הקומוטטורים. הוכיחו:
  - א.  $G' \trianglelefteq G$ .
  - ב.  $G/G'$  אבלית.
  - ג. אם  $f : G \rightarrow Y$  הומומורפיזם ו- $Y$  אבלית אז  $G' \subseteq \ker f$ .
6. ענו על הסעיפים הבאים:
  - א. מצאו את  $(A_4)'$ .
  - ב. מצאו את  $(S_4)'$ .
7. הוכיחו שכל חבורה מסדר 88 היא פתירה.
8. יהיו  $A, B$  חבורות נלפוטנטיות. הוכיחו:
  - א. לכל  $K, K \leq A$  נלפוטנטית.
  - ב. לכל  $A/K, K \trianglelefteq A$  נלפוטנטית.
  - ג.  $A \times B$  נלפוטנטית.