# תרגיל בית 6 באלגברה מופשטת 1

88-211 סמסטר א' תשע"ו

1. הסתכלו בתרגיל הקודם ומצאו מיהן הת"ח הנורמליות של $D_4$.

2. יהיו $H, K \leq G$ ת"ח.

   (א) הוכיחו כי $HK$ היא ת"ח אם ורק אם $HK = KH$ (כלומר שכל מכפלה מהצורה $h_1k_1$ שווה לאיזשהי מכפלה מהצורה $k_2h_2$ וכן להפך).

   (ב) הסיקו שאם $H \lhd G$ אז $HK$ היא ת"ח.

   (ג) הוכיחו כי אם $H \lhd G$ וגם $K \lhd G$ אז $HK \lhd G$.

   (ד) תנו דוגמא לשתי ת"ח שאינן נורמליות ומכפלתן היא ת"ח (רמז: חפשו ב$D_4$).

3. הוכיחו כי אם $N \lhd G$ אזי $Z(N) = \{x \in N \,|\, \forall y \in N \; xy = yx\}$ היא תת־חבורה נורמלית של $G$.

   שימו לב: אתם יודעים שהמרכז של חבורה הוא תת־חבורה נורמלית ולכן ברור ש $Z(N) \lhd N$. אבל אנחנו שאלנו אם זה נורמלי ב$G$!

4. תהי $G$ חבורה. עבור איבר $a \in G$ הקבוצה $C_a = \{g \in G \,|\, ga = ag\}$ נקראת המרכז של $a$ ב $G$. זו תת־חבורה (השתכנעו בכך).

   (א) הוכיחו כי לכל חבורה $G$ מתקיים: $Z(G) = \bigcap_{a \in G} C_a$.

   (ב) מצאו חבורה $G$ ואיברים $a, b \in G$ כך ש $C_a$ ת"ח נורמלית, ו $C_b$ ת"ח לא נורמלית.

5. עבור כל אחת מהפונקציות הבאות, קבעו והוכיחו האם היא הומומורפיזם או לא. אם כן, האם היא מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם.

   (א) $f : \mathbb{C}^\times \to \mathbb{C}^\times$ המוגדרת ע"י $f(x) = x^{-5}$.

   (ב) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_n$ המוגדרת ע"י $f(a) = a \pmod n$.

   (ג) $G, H$ חבורות , $f : G \times H \to H \times G$ המוגדרת ע"י $f(g, h) = (h, g)$.

   (ד) $f : S_7 \to \mathbb{Z}$ המוגדרת ע"י $f(\sigma) = \sigma(1)$.

   (ה) $f : S_5 \to S_6$ המוגדרת כך:
   עבור $\sigma \in S_5$, $f(\sigma)\colon \{1, 2, \ldots, 6\} \to \{1, 2, \ldots, 6\}$ פועלת באופן הבא
   $f(\sigma)(i) = \begin{cases} \sigma(i) & 1 \leq i \leq 5 \\ 6 & i = 6 \end{cases}$.

הסבר אחר: אם $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) \end{pmatrix}$ אזי $f(\sigma) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \sigma(4) & \sigma(5) & 6 \end{pmatrix}$.

(ו) עבור חבורה $G$ ואיבר $x \in G$. $f : G \to G$ המוגדרת ע"י $f(g) = x^{-1}gx$.

6. נתון $\varphi : G_1 \to G_2$ הומומורפיזם.

(א) הוכיחו שאם $G_1$ אבלית אזי $\mathrm{Im}\varphi$ היא ת"ח אבלית.

(ב) הוכיחו כי $\varphi$ חח"ע אם"ם $\ker\varphi = \{e_1\}$. כאשר $e_1$ היא היחידה של $G_1$.

7. כמה הומומורפיזמים לא טריוויאלים (כלומר, לא כולל הומומורפיזם ששולח כל איבר ליחידה) יש $\varphi : \mathbb{Z}_6 \to S_3$? נמקו, ומצאו את הגרעין של כל הומומורפיזם כזה.