

תרגיל בית 2 בתורת החבורות 88-218 סמסטר א' תשע"ח

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא, מספר ת"ז ומספר קבוצת תרגול. הגישו את התרגיל בתרגול בשבוע המתחיל בתאריך 12.11.2017.

שאלות חימום

שאלות החימום הן שאלות שאינן להגשה, והן בדרך כלל קלות יותר. אבל כדאי מאוד לוודא שידועים איך לפתור אותן, אפילו בעל פה.

שאלה 1. בחרו כמה סעיפים וענו עבור המערכת האלגברית המופיעה בו:
האם היא אגודה?
האם היא מונואיד? אם כן, מי הוא איבר היחידה?
האם היא חבורה?
האם הפעולה היא חילופית?

א. $(\mathbb{N}, *)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ב. $(\mathbb{Q} \setminus \{-1\}, *)$, המספרים הרציונלים בלי -1 עם הפעולה $a * b = a + b + ab$.

ג. (\mathbb{N}, \max) , המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ד. $(\mathbb{Z} \setminus 3\mathbb{Z}, \cdot)$, המספרים השלמים פרט לכפולות של 3 עם פעולת הכפל הרגילה.

ה. תהי X קבוצה. $(P(X), \Delta)$, כאשר $P(X)$ היא קבוצת החזקה של X . הפעולה היא ההפרש הסימטרי המוגדר לכל $A, B \in P(X)$ לפי $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

ו. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ז. (A, \cdot) , הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

שאלה 2. תהי G חבורה, ו- $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$, אזי $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש- $ab = e$ אזי $ba = e$ ו- $b = a^{-1}$.

שאלה 3. תהי S אגודה ו- $a \in S$ איבר. נגדיר את פעולת החזקה לפי $a^1 = a$, ולכל $n > 1$ נגדיר $a^{n+1} = a^n \cdot a$. הוכיחו כי מתקיים:

א. $a^n a^m = a^{n+m}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ב. $(a^n)^m = a^{nm}$ לכל $n, m \in \mathbb{N}$.

ג. נניח כי S היא חבורה עם איבר יחידה e ונרחיב את ההגדרה לכל חזקה שלמה לפי $a^0 = e$ ו- $a^{-n} = (a^{-1})^n$. הוכיחו כי $a_1^{-1} \dots a_k^{-1} = (a_1 \dots a_k)^{-1}$ לכל $a_1, \dots, a_k \in S$. הסיקו כי $(a^n)^{-1} = (a^{-1})^n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$.

שאלות להגשה

שאלה 4. תהינה $(G, *)$ ו- (H, \bullet) חבורות. נגדיר על המכפלה הקרטזית $G \times H$ פעולה "רכיב-רכיב":

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 * g_2, h_1 \bullet h_2)$$

לכל $g_1, g_2 \in G, h_1, h_2 \in H$.

א. הוכיחו כי $G \times H$ עם הפעולה לעיל היא חבורה. היא נקראת המכפלה הישרה (החיצונית) של G ו- H .

ב. הוכיחו או הפריכו: החבורה $G \times H$ אבלית אם ורק אם G ו- H אבליות.

ג. תהינה G', H' תת-חבורות של G, H בהתאמה. הוכיחו או הפריכו: $G' \times H'$ היא תת-חבורה של $G \times H$.

שאלה 5. מצאו את לוח כפל של חבורה עם שישה איברים המכילה איברים σ, τ, e המקיימים $\sigma\tau \neq \tau\sigma$ ו- $\sigma^3 = e, \tau^2 = e$.

בתור התחלה, שימו לב שכל איבר ניתן לרשום באופן מייצג בצורה $\tau^i \sigma^j$ עבור $i = 0, 1$ ו- $j = 0, 1, 2$. בעזרת הנתונים אפשר למצוא את טבלת הכפל המלאה של החבורה.

שאלה 6. תהי G חבורה. הוכיחו כי G אבלית אם ורק אם לכל $a, b \in G$ מתקיים כי $(ab)^2 = a^2 b^2$.

שאלה 7. תהי $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ חבורה אבלית סופית. נסמן $b = a_1 a_2 \dots a_n$. הוכיחו כי $b^2 = e$ רשות: בעזרת השאלה הבאה מצאו קריטריון מתי $b = e$.

שאלה 8. תהי G חבורה. נסמן $m_2 = |\{x \in G \mid x^2 = e\}|$.

א. הראו שבכל חבורה סופית מתקיים: $m_2 \equiv |G| \pmod{2}$.

ב. הראו שבכל חבורה עם מספר זוגי של איברים קיים איבר $x \neq e$ המקיים $x^2 = e$.

הדרכה לסעיף א: העזרו ביחס השקילות הבא על G : $x \sim y \iff x = y \vee xy = e$. מה הגודל של כל מחלקת שקילות?

שאלה 9. יהי F שדה. קבעו (והוכיחו את קביעתכם) האם תת-הקבוצות הבאות הן תת-חבורות של החבורות הנתונות או לא:

א. $O_n(F) = \{A \in GL_n(F) \mid A^T = A^{-1}\} \subseteq GL_n(F)$. המטריצות האורתוגונליות.

ב. $\{A \in M_n(F) \mid \det A = 0\} \subseteq M_n(F)$.

שאלה 10. תהי G חבורה ו- H, K תת-חבורות שלה. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. $H \cap K$ היא תת-חבורה.

2. $H \cup K$ היא תת-חבורה.

3. $HK = \{hk \mid h \in H, k \in K\}$ היא תת-חבורה.

4. אם G אבלית אז HK היא תת-חבורה.

5. $\Delta_H = \{(h, h) \mid h \in H\}$ היא תת-חבורה של $G \times G$.

שאלות רשות

את שאלות הרשות אין חובה לפתור, אבל אם פתרתם אותן, בבקשה צרפו את הפתרון שלהן.

שאלה 11. הוכיחו שאם באגודה S יש פתרון לכל משוואה מן הצורה $ax = b$ או $xa = b$, אז זו חבורה. (רמז: לפי ההנחה יש איבר $e \in S$ (התלוי ב- a) כך ש- $ae = a$. לכל $c \in S$ קיים x כך ש- $xa = c$, ואז $ce = xae = xa = c$, ולכן e הוא יחידה מימין. באופן דומה יש יחידה משמאל.)

בהצלחה!