ב"א אלגברה לינארית תשעז מועד א

1. משפט מההרצאה.
2. משפטים מההרצאה.
3.

(א) מצאו מספר מרוכב z המקיים $z^2 = \bar{z}$.

פתרון: נסמן $z = a + bi$ עבור $a, b \in \mathbb{R}$ ממשיים. ונסתכל על המשוואה מהשאלה

$$(a+bi)^2 = \overline{a+bi}$$

או

$$a^2 - b^2 + 2abi = a - bi$$

ונשווה את החלק הממשי והחלק המדומה (בנפרד) לקבל את שתי המשוואות

$$\begin{cases} a^2 - b^2 & = a \\ 2ab & = -b \end{cases}$$

ננסה $b = 0$ (כלומר z מספר ממשי..) ונקבל

$$\begin{cases} a^2 & = a \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

שקל לפתור $a = 1, 0$ וקיבלנו ש $z = 1$ ו $z = 0$ אכן פתרונות למשוואה.

(ב) מצאו לאילו ערכי k למערכת

$$\begin{cases} x - 3z & = -3 \\ 4x + 2ky - 2z & = -4 \\ z + 2y + kz & = 1 \end{cases}$$

יש:

- פתרון יחיד.
- אין סוף פתרונות.
- אין פתרון.

פתרון: נעביר את מערכת המשוואות לייצוג במטריצה ונדרג אותה:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 4 & 2k & -2 & -4 \\ 1 & 2 & k & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 - R_1]{R_2 - 4R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2k & 10 & 8 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 2k & 10 & 8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{R_3-kR_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & k+3 & 4 \\ 0 & 0 & 10-k^2-3k & 8-4k \end{array}\right)$$

וכעת:

אם $10-k^2-3k\neq 0$ נקבל שיש לנו צורה מדורגת, ללא שורת סתירה וללא משתנים חופשיים ולכן במקרה זה יהיה פתרון יחיד. נטפל במקרה ש $10-k^2-3k=0$: נשים לב ש $k^2+3k-10=(k+5)(k-2)$ ולכן $10-k^2-3k=0$ אמ"מ $k=5$ או $k=2$.

- $k=2$ - נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

שהיא בצורה מדורגת, ללא שורת סתירה ועם משתנה חופשי (z) ולכן במקרה זה יהיו אינסוף פתרונות.

- $k=5$- נקבל את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -12 \end{array}\right)$$

שיש בה שורת סתירה ולכן במקרה זה לא יהיה פתרון.

4. נתונה מהמטריצה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{3\times 3}$$

(א) מצאו בסיס ומימד לתתי המרחבים: $C(A)\cap R(A)$ ו $N(A)$.

פתרון: נתחיל בדירוג המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_3+R_1}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_3-2R_2}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-2R_2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכ

$$N(A)\overbrace{=}^{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}}\left\{\begin{pmatrix} t \\ -t \\ t \end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ בסיס ל$N(A)$ ולכן $\dim N(A)=1$. בנוסף, השורות השונות מאפס בצורה מדורגת מהוות בסיס ל $R(A)$ ולכן

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $R(A)$ ו $\dim R(A)=2$. ולסיום עמודות במטריצה A שיש בהם איברים פותחים בצורה מדורגת - מהוות בסיס

ל$C(A)$ ולכן (כיוון שיש איברים פותחים בעמודות 1 ו 2 בצורה מדורגת)

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

בסיס ל $C(A)$ ו $\dim C(A)=2$. כעת נמיר את $C(A),R(A)$ לייצוג כפתרון למערכת משוואות כך: עבור $R(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\-1&1&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&1&z+x\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&0&x\\0&1&y\\0&0&z+x-y\end{array}\right)$$

ולכן

$$R(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid z-x-y=0\right\}$$

ועבור $C(A)$:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&1&y\\-1&0&z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&1&y\\0&2&z+x\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_2}\left(\begin{array}{cc|c}1&2&x\\0&1&y\\0&0&z+x-2y\end{array}\right)$$

ולכן

$$C(A)=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \mid z+x-2y=0\right\}$$

וכעת

$$C(A)\cap R(A)=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{c}z+x-y=0\\z+x-2y=0\end{array}\right\}$$

נפתור את המערכת בעזרת ייצוג מטריצי

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&-2&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

ולכן

$$C(A)\cap R(A)=N\left(\begin{pmatrix}-1&-1&1\\-1&-2&1\end{pmatrix}\right)\overbrace{=}^{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}}\left\{\begin{pmatrix}-t\\0\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ בסיס ל $C(A)\cap R(A)$ ומתקיים $\dim\left[C(A)\cap R(A)\right]=1$.

(ב) הסבירו **לפי סעיף א**: האם A הפיכה?

פתרון: לא, כי $\text{rank}A=2$ (מימד מרחב השורות) ולכן $\text{rank}A\neq 3$ ולכן A אינה הפיכה.

(ג) מצאו את מיהו המרחב הניצב $\left(\text{span}\left\{N(A),C(A)\cap R(A)\right\}\right)^{\perp}$.
פתרון: מתקיים כי

$$\text{span}\left\{N(A),C(A)\cap R(A)\right\}=\text{span}\left\{N(A)\right\}+\text{span}\left\{C(A)\cap R(A)\right\}=N(A)+\left[C(A)\cap R(A)\right]=$$

$$=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right\}+\text{span}\left\{\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ולכן

$$\left(\text{span}\left\{N(A),C(A)\cap R(A)\right\}\right)^{\perp}=\left(\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}=\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}$$

ואפשר למצוא אותו על ידי מציאת מרחב האפס של המטריצה הבאה (שכבר נמשיך לדרג אותה)

$$\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+R_1}\begin{pmatrix}1&-1&1\\0&-1&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&-1&2\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\left(\left\{\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}\right)^{\perp}\underbrace{=}_{z=t\ \text{(המשתנה החופשי)}}\left\{\begin{pmatrix}t\\2t\\t\end{pmatrix}\mid t\in\mathbb{R}\right\}=\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

ו $\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס למרחב הניצב ומימדו שווה 1.

5. יהא $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ בסיס של מרחב וקטורי V מעל שדה $\mathbb{F}$.

(א) הוכיחו כי לכל וקטור $v\in V$ קיימת הצגה יחידה $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$ (ז"א שיש ויש רק אופציה אחת לבחור את הסקלרים $\alpha_1,\dots\alpha_n$ מהשדה).
פתרון: יהא $v\in V$. כיוון ש B בסיס הוא בפרט פורש את V, כלומר $V=\text{span}B$ ולכן קיימים סקלרים $\alpha_1,\dots\alpha_n$ כך ש $v=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$. נראה שהם יחידים: נניח שקיימים $\beta_1,\dots,\beta_n$ כך ש

$$v=\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n$$

ונראה כי $\alpha_1=\beta_1,\dots,\alpha_n=\beta_n$ (זה מראה על יחידות הסקלרים). אכן, כיוון ששני הצירופים שווים ל v נקבל ש

$$\beta_1v_1+\cdots+\beta_nv_n=\alpha_1v_1+\cdots+\alpha_nv_n$$

ונעביר אגף ונוציא גורם משותף לקבל

$$\left(\alpha_1-\beta_1\right)v_1+\cdots+\left(\alpha_n-\beta_n\right)v_n=0$$

ומכיון ש B בסיס ובפרט בת"ל נקבל שכל מקדמי הצירוף הנ"ל שווים אפס, כלומר

$$(\alpha_1 - \beta_1) = 0, \dots, (\alpha_n - \beta_n) = 0$$

נעביר אגף ונקבל

$$\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_n = \beta_n$$

כפי שרצינו.

(ב) תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ מטריצה הפיכה. הוכיחו שגם $Av_1, \dots, Av_n$ הוא בסיס של V.
פתרון: נוכיח ישירות לפי הגדרה ש $Av_1, \dots, Av_n$ הוא בסיס של V:

- בת"ל: נניח צירוף לינארי שלהם שמתאפס, $\alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_n Av_n = 0$, ונראה שכל המקדמים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ שווים אפס. אכן, כיוון שיש פילוג, נקבל ש

$$A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_n Av_n = 0$$

ומכיוון ש A הפיכה, נוכל לכפול ב A^{-1} משמאל לקבל

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = A^{-1}0 = 0$$

ומכיוון ש $v_1, \dots, v_n$ בת"ל וקיבלנו צירוף לינארי שלהם שמתאפס נסיק כי המקדמים שלו, שהם $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, כולם שווים אפס כפי שרצינו.

- פורשת את V: יהא $v \in V$ ונראה שקיימים מקדמים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש $\alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_n Av_n = v$. אכן, כיוון ש $v_1, \dots, v_n$ פורשים את v נקבל שקיימים $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ כך ש

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n = A^{-1}v$$

(כן, גם $A^{-1}v$ הוא וקטור). נכפול את השיוויון הנל ב A ונשתמש בפילוג לקבל ש

$$\alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_n Av_n = A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n) = A\left(A^{-1}v\right) = v$$

כפי שרצינו.

(ג) תהא $S = \{v_1, \dots, v_n\}$ קבוצה אורתוגונאלית (קבוצה שכל הוקטורים בה מאונכים זה לזה) כך ש $0 \notin S$. הוכיחו כי S בת"ל.
פתרון: נוכיח זאת באינדוקציה על גודל הקבוצה S.

- בסיס $n = 1$: עבור $S = \{v\}$ אורתוגונלית (או"ג) נקבל שהיא אכן בת"ל שהרי כל וקטור שונה מאפס הוא בת"ל.
- צעד: נניח נכונות עבור n (כל קבוצה בת n איברים או"ג שאין בה את איבר האפס היא בת"ל) ונוכיח זאת עבור $n+1$. תהא $S = \{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ קבוצה או"ג כך ש $0 \notin S$. נוכיח ש S בת"ל. יהא

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + \alpha_{n+1} v_{n+1} = 0$$

צירוף לינארי שלהם שמתאפס ונוכיח כי כל המקדמים שווים אפס. נתחיל בכך ש $\alpha_{n+1} = 0$ שהרי אם $\alpha_{n+1} \neq 0$ נוכל להעביר אגף לחלק בו ולקבל ש

$$v_{n+1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}} v_1 - \dots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}} v_n$$

ואז

$$0 \underbrace{\neq}_{v_{n+1}\neq 0} \langle v_{n+1}, v_{n+1}\rangle = \left\langle -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}v_1 - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}v_n, v_{n+1}\right\rangle = -\frac{\alpha_1}{\alpha_{n+1}}\langle v_1, v_{n+1}\rangle - \cdots - \frac{\alpha_n}{\alpha_{n+1}}\langle v_n, v_{n+1}\rangle \underbrace{=}_{S\text{ או"ג}} 0$$

סתירה. לכן קיבלנו ש $\alpha_{n+1} = 0$ ונשאר עם השיוויון

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

אבל $\{v_1, \ldots, v_n\}$ קבוצה או"ג בלי אפס ולכן בת"ל ומכאן שהצירוף הלינארי שלהם שמתאפס, $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, גורר שכל מקדמיו שווים אפס. כלומר $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0$ ובסה"כ קיבלנו ש

$$[\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_n = 0] \wedge [\alpha_{n+1} = 0]$$

כפי שרצינו.

(ד) האם קיימת מטריצה $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ כך ש

$$C(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}$$

וגם

$$N(A) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right\}$$

אם כן, תנו דוגמה למטריצה כזאת. אם לא, הסבירו מדוע מטריצה כזאת לא קיימת.
פתרון: לא יכול להיות שהרי לפי משפט הדרגה צריך להתקיים

$$\dim C(A) + \dim N(A) = 3$$

ולכן אם היתה מטריצה כמתואר בשאלה היינו מקבלים שעבורה מתקיים $\dim C(A) + \dim N(A) = 2$ בסתירה למשפט הדרגה.