אלגברה מופשטת 2 – תרגיל כיתה 12

מתרגלים: ד"ר אפי כהן ואדם צ'פמן.

משפט:

מודול נוצר סופית M מעל תחום ראשי R הוא מהצורה $M_A = R^n / AR^n$ כאשר $A \in M_n(R)$.

דוגמא:

$M =< x, y : mx = ny = 0 >$ הוא מודול נוצר סופית מעל $R = \mathbb{Z}$. במקרה זה $M = \mathbb{Z}^2 / A\mathbb{Z}^2$ כאשר $A = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix}$ ולכן $M = \mathbb{Z}_m \oplus \mathbb{Z}_n$.

תרגיל:

מה הסדר של

$G =< a,b,c : a + 2b + 3c = 2a + 4b + 3c + a + 4b + 9c = 0 >$? [פיתרון יבוא תכף]

הגדרה:

יהי R תחום שלמות, ויהיו $A, B \in M_n(R)$. $A \sim B$ אם קיימות $P, Q \in GL_n(R)$ כך ש $PAQ = B$. [לא להתבלבל עם הגדרת הצמידות]

משפט: $A \sim B$ אם ורק אם $M_A = M_B$.

הערה: כל מטריצה A מעל R אפשר להביא ע"י כפל במטריצות הפיכות לצורה אלכסונית

$$\begin{pmatrix} d_1 & & & & \\ & d_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

כך ש $d_i \mid d_{i+1}$ לכל i. זו נקראת הצורה הקנונית של A ו d_i נקראים הגורמים האינווריאנטיים. אם מספר הגורמים השונים מאפס באלכסון הוא m ומספר האפסים הוא n אזי $M_A \cong R/d_1 \oplus \ldots \oplus R/d_m \oplus R^n$. [הטענה האחרונה נכונה גם אם המטריצה האלכסונית היא לא בצורה קנונית, כלומר לא חייב להתקיים $d_i \mid d_{i+1}$ לכל i]

הערה: הצורה הקנונית היא יחידה עד כדי כפל באיברים הפיכים.

פיתרון התרגיל:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - 2R_1; R_3 \leftarrow R_3 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 - 2C_1; C_3 \leftarrow C_3 - 3C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftarrow R_2 - R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_2 \leftarrow C_2 + C_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3 \leftarrow R_3 + 4R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_3 \leftarrow C_3 + 3C_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

לכן $G \cong \mathbb{Z}_6$, משמע $|G| = 6$.

תרגיל: נרמלו את $\begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & 21 \end{pmatrix}$ מעל $\mathbb{Z}$ [כלומר מצאו מטריצה מגודל 2X2 אלכסונית קנונית הדומה לה].

פיתרון: ראשית, נשים לב ש $3=\gcd(27,21)=4\cdot 21-3\cdot 27$.

$$\begin{pmatrix}27&0\\0&21\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\leftarrow R_1+4R_2}\begin{pmatrix}27&84\\0&21\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2-3C_1}\begin{pmatrix}27&3\\0&21\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}3&27\\21&0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-7R_1}\begin{pmatrix}3&27\\0&-189\end{pmatrix}\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2-9C_1}\begin{pmatrix}3&0\\0&-189\end{pmatrix}$$

תרגיל: נסמן $R=\mathbb{Q}[x]$. נתונה $A=\begin{pmatrix}x+1&2&-6\\1&x&-3\\1&1&x-4\end{pmatrix}\in M_3(R)$ ויהי $M=R^3/AR^3$. הוכיחו כי $<(1-x^2)>\subseteq Ann(M)$.

פיתרון:

$$A\xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2}\begin{pmatrix}1&x&-3\\x+1&2&-6\\1&1&x-4\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow R_2-(x-1)R_1;R_3\leftarrow R_3-R_1}\begin{pmatrix}1&x&-3\\0&-x^2-x+2&3x-3\\0&1-x&x-1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2-xC_1;C_3\leftarrow C_3+3C_1}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-x^2-x+2&3x-3\\0&1-x&x-1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftrightarrow R_3}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-x&x-1\\0&-x^2-x+2&3x-3\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_3\leftarrow R_3-(x+2)R_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-x&x-1\\0&0&-(x-1)^2\end{pmatrix}\xrightarrow{C_3\leftarrow C_3+C_2}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1-x&0\\0&0&-(x-1)^2\end{pmatrix}$$

לכן $M\cong R/<1-x>\oplus R/<(1-x)^2>$. קל לראות אם כן כי $<(1-x^2)>\subseteq Ann(M)$.

הערה: כזכור, בהיתן מרחב וקטורי $V=F^n$ והעתקה ליניארית $T:V\to V$ המייוצגת ע"י $A\in M_n(F)$ אז V_T הוא מודול מעל $F[x]$ עם כפל $f(x)\cdot v=f(T)(v)$. V_T

הוא נוצר סופית מעל $F[x]$ אבל לא חופשי, משום שקיים פולינום $f(x)\in F[x]$ המקיים $f(x)\cdot v=0$ לכל $v\in V$ (למשל הפולינום המינימלי של T). לכן $V_T\cong F[x]^n/M_TF[x]^n$.

טענה: $M_T=xI-A$, משמע $V_T\cong F[x]^n/(xI-A)F[x]^n$.

דוגמא: תהי $B=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 6\\ -1 & 0 & 3\\ -1 & -1 & 4\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{Q})$. $T_B:\mathbb{Q}^3\to\mathbb{Q}^3$. $V=\mathbb{Q}^3$ הוא $\mathbb{Q}[x]$-מודול נוצר סופית ומתקיים $V_{T_B}=\mathbb{Q}[x]^3/(xI-B)\mathbb{Q}[x]^3$. אז ניתן לנרמל את $xI-B$ כדי לקבל הצגה של V_B כסכום ישר של מודולים. לפי הדוגמא הקודמת (ששם נרמלנו את $xI-B$), $V_B\cong\mathbb{Q}[x]/<1-x>\oplus\mathbb{Q}[x]/<(1-x)^2>$

הגדרה: $A,B\in M_n(R)$ צמודות אם קיימת $P\in GL_n(R)$ כך ש $A=PBP^{-1}$.

משפט: A ו B צמודות אם ורק אם $xI-A\sim xI-B$.

תרגיל: הראה כי $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ הן צמודות.

פיתרון:

$$xI-A=\begin{pmatrix}x-1 & -2\\ 0 & x-1\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftrightarrow C_2}\begin{pmatrix}-2 & x-1\\ x-1 & 0\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\leftarrow 2R_2-(x-1)R_1}\begin{pmatrix}-2 & x-1\\ 0 & (x-1)^2\end{pmatrix}.$$

$$\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2+\frac{1}{2}(x-1)C_1}\begin{pmatrix}-2 & 0\\ 0 & (x-1)^2\end{pmatrix}\xrightarrow{C_1\leftarrow -\frac{1}{2}C_1}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & (x-1)^2\end{pmatrix}$$

$$xI-B=\begin{pmatrix} x-3 & 4 \\ -1 & x+1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} -1 & x+1 \\ x-3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2\leftarrow R_2+(x-3)R_1} \begin{pmatrix} -1 & x+1 \\ 0 & (x-1)^2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{C_2\leftarrow C_2+(x+1)C_1} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & (x-1)^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{C_1\leftarrow -C_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (x-1)^2 \end{pmatrix}$$

טענה: יהי תת-שדה $F\subseteq\mathbb{C}$. $A,B\in M_n(F)$. A וB צמודות מעל F אם ורק אם הן צמודות מעל $\mathbb{C}$.

הוכחה: כיוון אחד טריוויאלי. נוכיח את הכיוון השני. אם A וB צמודות מעל $\mathbb{C}$ אז יש להן אותה צורה קנונית. כעת, אם $M\in M_n(F)$ אז גם הצורה הקנונית שלה שייכת ל$M_n(F)$ (וניתן בכלל להגיע לצורה הזאת כי $F[x]$ ראשי). לכן $xI-A\sim_F xI-B$, משמע A וB צמודות מעל F.

הגדרה: מטריצה מלווה עבור הפולינום $f(x)=x^n-a_{n-1}x^{n-1}-\ldots-a_0$ היא

$$C_f=\begin{pmatrix} 0 & & & a_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & \\ & & 1 & a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

טענה: $(F^n)_{C_f}\cong F[x]/<f>$.

תרגיל-בית: הוכיחו כי המטריצות $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ו $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ הן צמודות מעל $\mathbb{Z}_3$.

[רמז: אחת מהן היא מטריצה מלווה של פולינום]