שיעורי בית 3

27 בנובמבר 2016

1. יהיו G_1, G_2 חבורות הוכח/הפרך:
   (א) אם $G_1 \times G_2$ ציקלית אז גם G_2 וגםG_1 ציקלית.
   (ב) אם G_1 וגם G_2ציקליות אז $G_1 \times G_2$ ציקלית.
2. תהא G חבורה סופית. יהיו $a, b \in G$. הוכח/הפרך
   (א) אם a, b מתחלפים אז $o(ab) = o(a) \cdot o(b)$
   (ב) $\langle a \rangle = \langle a^3 \rangle$
   (ג) אם $b = a^4$ אזי $\langle ab \rangle \subseteq \langle a \rangle$
   (ד) $\langle a \rangle = \langle a^{-1} \rangle$
3. הוכח כי החבורות הבאות אינן ציקליות
   (א) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   (ב) $\mathbb{Q}$
4. תהא G חבורה. $g \in G$. נניח כי $g^k = e$. הוכח כי $o(g)|k$

כלומר הסדר של g מחלק את k.
הדרכה: בצע חילוק עם שארית של k ב $o(g)$

5. תהא G חבורה חילופית. יהיו $a,b \in G$ בעלי סדרים זרים. כלומר, נסמן $o(a) = n, o(b) = m$ אזי $\gcd(n,m) = 1$ (ל n,m אין מחלק משותף פרט ל־1). הוכח כי

$$o(ab) = m \cdot n$$

היעזר בתרגיל מספר 4

6. כמה כמה יוצרים יש ל $\mathbb{Z}_6 = \{[0],[1],[2],[3],[4],[5]\}$ (עם פעולת מדולו 6 או כפי שלמדנו עם פעולה $[a]+[b]=[a+b]$)?

7. תהא G חבורה ויהא $g \in G$ מסדר n. הוכיחו כי $o(g^k) = \frac{n}{\gcd(k,n)}$