תרגול 1 - מספרים מרוכבים

הגדרות ותכונות

- שדה המספרים המרוכבים: $\mathbb{C} = \{x + iy : x, y \in \mathbb{R}\}$
- הצגה קרטזית (או אלגברית) של מספר מרוכב: $z = x + iy$
- הצמוד: $\overline{z} = \overline{x + iy} = x - iy$
- חלק ממשי: $\mathrm{Re}(z) = x = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$
- חלק מדומה: $\mathrm{Im}(z) = y = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$
- תכונות הצמוד: $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- מודול: $|z|^2 = z\overline{z} = x^2 + y^2$
- תכונות המודול: $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$
- אי שיויון המשולש: $\big||z_1| - |z_2|\big| \leq |z_1 \pm z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
- הארגומנט של מספר מרוכב: $z = x + iy, \quad \tan\theta = \dfrac{y}{x}, \quad \theta = \arg(z)$
- תכונות הארגומנט: $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2), \quad \arg(\frac{z_1}{z_2}) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$
- הארגומנט העיקרי: $\mathrm{Arg}(z) \in [-\pi, \pi)$
- נוסחת אוילר: $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$
- הצגה קוטבית (פולארית) של מספר מרוכב: $z = re^{i\theta}, \quad r = |z|, \quad \theta = \arg(z)$
- נוסחת דה־מואבר: $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \quad \left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- חזקה של מספר מרוכב: $z^n = \left(re^{i\theta}\right)^n = r^n \cdot e^{in\theta} = r^n\left(\cos n\theta + i\sin n\theta\right)$
- שורש של מספר מרוכב:

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\theta + 2\pi k}{n}} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\tfrac{\theta+2\pi k}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta+2\pi k}{n}\right)\right), \quad k = 0, 1, \ldots n-1$$


Leonhard Euler
1707-1783


Abraham De-Moivre
1667-1754

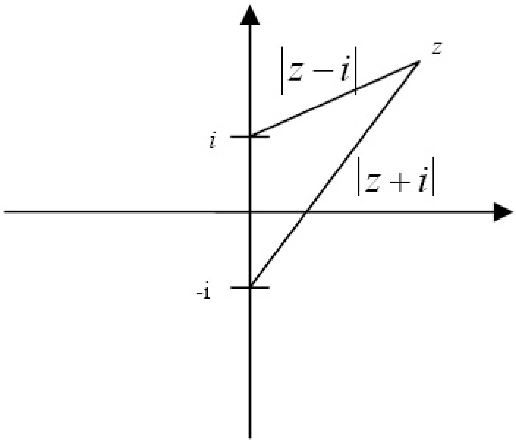
1. פשטו את השבר: $\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}$ (כלומר - מצאו הצגה מהצורה $a+ib$).

פתרון: נכפיל בצמוד של המכנה ונקבל:

$$\frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}=\frac{(1+i)^{16}}{(1-i)^7(1+i)^7}=\frac{((1+i)^2)^8}{2^7}=\frac{(1+2i-1)^8}{2^7}=\frac{2^8}{2^7}=2$$

2. תארו את קבוצת הנקודות במישור $\mathbb{C}$ המקיימות את אי־השיווין $|z-i|-|z+i|<2$.

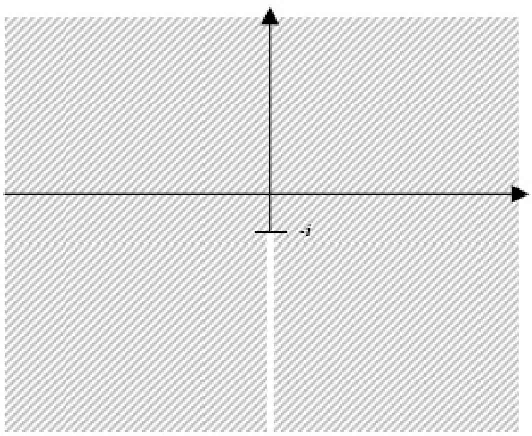
פתרון: $|z-i|$ הוא המרחק של z מ־ i, ו־ $|z+i|$ הוא המרחק של z מ־ $-i$.



נחשב את $|z-i|-|z+i|=2$ ואז נכריע לגבי האי־שיויון.
דרך אלגברית: נסמן $z=x+iy$ ולכן נקבל:

$$\Rightarrow\quad |x+iy-i|-|x+iy+i|=2 \quad\Rightarrow\quad x^2+(y-1)^2=x^2+(y+1)^2+4+4\sqrt{x^2+(y+1)^2}$$
$$\Rightarrow\quad -4y=4+4\sqrt{x^2+(y+1)^2} \quad\Rightarrow\quad (y+1)^2=x^2+(y+1)^2$$
$$\Rightarrow\quad x=0,\quad y+1\le 0 \quad\Rightarrow\quad x=0, y\le -1$$

דרך גיאומטרית: המרחק בין i ל־ $-i$ הוא בדיוק 2 ולכן המשוואה שלנו מתארת משולש המקיים, $|z-i|=2+|z+i|$ ומכיוון שאי־שיויון המשולש מתקיים נקבל ש־ $y\le -1$.



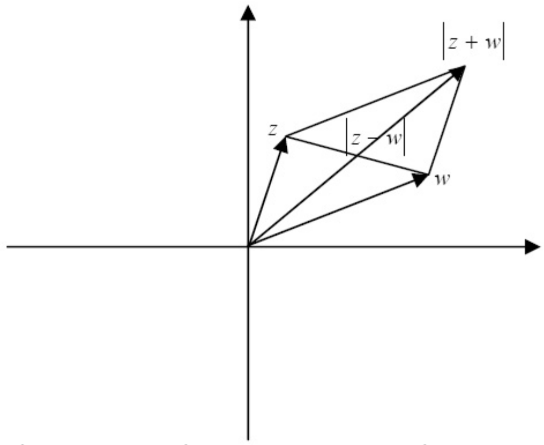
בסה"כ הקבוצה שלנו היא $\mathbb{C}\backslash\{z=iy\ :\ y\le -1\}$.

3. הוכיחו את שיויון המקבילית - $|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2)$ לכל $z,w\in\mathbb{C}$.

<u>פתרון:</u> נשתמש בהגדרת המודול $|z|^2=z\cdot\overline{z}$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (z+w)\cdot\overline{(z+w)} = z\overline{z}+z\overline{w}+w\overline{z}+w\overline{w} = z\overline{z}+2\operatorname{Re}(z\overline{w})+w\overline{w}\\
|z-w|^2 &= (z-w)\cdot\overline{(z-w)} = z\overline{z}-z\overline{w}-w\overline{z}+w\overline{w} = z\overline{z}-2\operatorname{Re}(z\overline{w})+w\overline{w}\\
&\Longrightarrow |z+w|^2+|z-w|^2 = 2\left(|z|^2+|w|^2\right)
\end{aligned}$$

מדוע שיויון זה נקרא "שיויון המקבילית" ?



4. מצאו את כל הפתרונות של המשוואה $(z-1)^3=-3$.

<u>פתרון:</u> נתיר את המשוואה, נסמן $-1=e^{i\pi}$ ונשתמש בנוסחת דה־מואבר עבור השורש:

$$z=1+\sqrt[3]{-3}=1+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{-1}=1+\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{e^{i\pi}}=1+\sqrt[3]{3}\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi k}{3}}\quad,\quad k=0,1,2$$

$$\begin{aligned}
z_1 &= 1+\sqrt[3]{3}\cdot e^{i\frac{\pi}{3}}\\
z_2 &= 1+\sqrt[3]{3}\cdot e^{i\frac{\pi+2\pi}{3}} = 1+\sqrt[3]{3}\cdot e^{i\pi}\\
z_3 &= 1+\sqrt[3]{3}\cdot e^{i\frac{\pi+4\pi}{3}} = 1+\sqrt[3]{3}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}
\end{aligned}$$

5. הוכיחו בעזרת נוסחת דה־מואבר את הזהות $\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta$.
<u>פתרון:</u> מזהות אוילר ונוסחת דה־מואבר נקבל:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta+i\sin 3\theta=e^{i3\theta} &= (\cos\theta+i\sin\theta)^3=\\
&= \cos^3\theta+3\cos^2\theta\cdot i\sin\theta+3\cos\theta\cdot(i\sin\theta)^2+(i\sin\theta)^3=\\
&= \cos^3\theta-3\cos\theta\cdot\sin^2\theta+i(3\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^3\theta)=
\end{aligned}$$

מהשוואת החלק המדומה נקבל: $\sin 3\theta=3\cos^2\theta\cdot\sin\theta-\sin^3\theta$ ונציב $\cos^2\theta=1-\sin^2\theta$ ונקבל:

$$\begin{aligned}
&\sin^3\theta=3(1-\sin^2\theta)\cdot\sin\theta-\sin 3\theta=3\sin\theta-3\sin^3\theta-\sin 3\theta\\
\Longrightarrow\quad &4\sin^3\theta=3\sin\theta-\sin 3\theta\\
\Longrightarrow\quad &\sin^3\theta=\frac{3}{4}\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 3\theta
\end{aligned}$$

6. ציירו את התחומים הבאים:

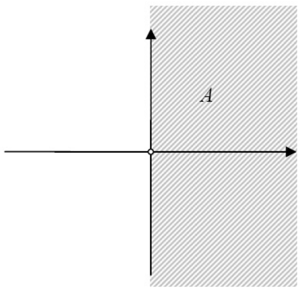
(א) $A=\left\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ z\neq 0, 0\leq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$

(ב) $B=\left\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ z\neq 0, 1\leq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$

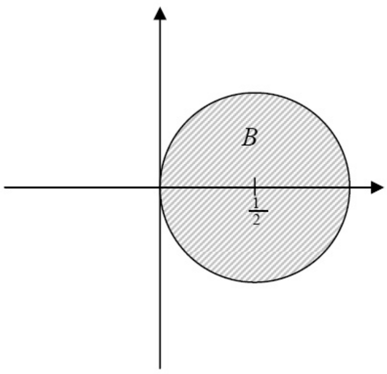
(ג) $C=\left\{z\in\mathbb{C}\ \mid\ \frac{\pi}{4}\leq \mathrm{Arg}(z+i)\leq \frac{\pi}{2}\right\}$

<u>**פתרון:**</u>

(א) $0\leq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq \mathrm{Re}\left(\frac{\bar z}{|z|^2}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 0\leq x$



(ב) $1\leq \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 1\leq \mathrm{Re}\left(\frac{\bar z}{|z|^2}\right) \quad\Leftrightarrow\quad x^2+y^2\leq x \quad\Leftrightarrow\quad (x-\frac{1}{2})^2+y^2\leq\frac{1}{4}$



(ג) נסמן $w=z+i$ כלומר $C'=\left\{w\in\mathbb{C}\ \mid\ \frac{\pi}{4}\leq \mathrm{Arg}(w)\leq\frac{\pi}{2}\right\}$ ו- $C=C'-i$.