

מבנים דיסקרטיים – תרגיל 1

שאלה 1

- א. נגדיר פעולה * על \mathbb{N} ע"י $a * b = 2a - b$. הראו כי $(\mathbb{N}, *)$ אינה מאגמה.
- ב. נגדיר פעולה * על \mathbb{Z} ע"י $a * b = 2a - b$. הראו כי $(\mathbb{Z}, *)$ היא מאגמה אך אינה אגודה.
- ג. נגדיר פעולה * על \mathbb{Q} ע"י $a * b = 6$. הראו כי $(\mathbb{Q}, *)$ היא אגודה אך אינה מונויד.
- ד. תהי $X = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq 0\}$. הראו כי $(X, +)$ היא מונויד אך אינה חבורה (הפעולה + היא חיבור וקטורים). מה איבר היחידה של X ?
- ה. תהי $X = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid 0 < a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \right\}$. הראו כי X עם כפל מטריצות היא חבורה. מה היחידה של X ?

שאלה 2

בכל סעיף נתונה קבוצה X ופעולה בינארית * על X . עליכם לבצע:

- קבעו האם $(X, *)$ חבורה \ מונויד \ אגודה \ מאגמה \ אף אחד מהקודמים. [יש להוכיח את האפשרות החזקה ביותר].
- קבעו האם הפעולה * חילופית (=אבלית).
- אם מדובר בחבורה או מונויד, מצאו את היחידה.
- אם מדובר באגודה, מצאו את כל היחידות השמאליות ואת כל היחידות הימניות (יתכן שאין).

סעיפים:

- א. $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. הפעולה * היא כפל מטריצות.
- ב. X היא אוסף הפונקציות מ- \mathbb{R} ל- \mathbb{R} והפעולה * היא $f * g = f \circ g \circ g$.
- ג. $X = \mathbb{N}$ והפעולה * מוגדרת ע"י $a * b = \max\{a, b\}$.
- ד. $X = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$. הפעולה * היא כפל מטריצות.