תרגיל 3 - חשבון אינפי 3 תש"פ

תרגיל 1. הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

1. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n, Y\subseteq\mathbb{R}^m$ סגורות, אזי $X\times Y\subseteq\mathbb{R}^{m+n}$ סגורה. (רמז: כדאי להשתמש באחד מהקריטריונים שלמדנו לסגירות של קבוצות).
2. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n, Y\subseteq\mathbb{R}^m$ פתוחות, אזי $X\times Y\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ פתוחה. (רמז: ניתן גם ישרות, אבל אפשר להשתמש גם בסעיף הקודם).
3. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n, Y\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטיות, אזי $X\times Y\subseteq\mathbb{R}^{n+m}$ קומפקטית.
4. אם $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ ו $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית, אזי $[a,b]\,X=\{tx|t\in[a,b]\,,x\in X\}$ היא קבוצה קומפקטית.
5. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ חסומה ו $Y\subseteq\mathbb{R}^n$ סגורה, אזי $X\cap Y$ קומפקטית.
6. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ו $X\neq\emptyset$, לכל $x\in X$, $X\setminus\{x\}$ אינה קומפקטית.
7. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ו $x\in X$ היא נקודה מובדדת, אזי x היא נקודת הצטברות של X^c.
8. אם $X\subseteq\mathbb{R}^n$ ו X אינה פתוחה ואינה סגורה, אזי $X^\circ\subsetneq\overline{X}$.
9. תהי A קבוצה, ויהי A' אוסף נקודת ההצטברות שלה. הוכיחו או הפריכו
$$(A')'=A'.$$

פתרון.

1. הוכחה: תהי $(x_k,y_k)\in X\times Y$ סדרה ונניח שהיא מתכנסת ל (x,y). כיוון שהיא מתכסת ב $\mathbb{R}^{n+m}$ היא מתכנסת רכיב-רכיב ולכן
$$\lim_{k\to\infty}x_k=x,\lim_{k\to\infty}y_n=y.$$
אבל $x_k\in X$ ו $y_k\in Y$ ו X,Y סגורות ולכן $x\in X$ ו $y\in Y$ ולכן גם $(x,y)\in X\times Y$ ולכן $X\times Y$ סגורה.
2. הוכחה: אם X,Y פתוחות, אזי
$$(X\times Y)^c=(X^c\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times Y^c).$$
כיוון ש X,Y פתוחות, X^c,Y^c סגורות ולכן $X^c\times\mathbb{R},\mathbb{R}\times Y^c$ סגורות ו $(X^c\times\mathbb{R})\cup(\mathbb{R}\times Y^c)$ סגורה כאיחוד של שתי קבוצות סגורות. קיבלנו ש $(X\times Y)^c$ סגורה ולכן $X\times Y$ פתוחה.

3. הוכחה: אם X,Y קומפקטיות הן חסומות (קל לראות שזה אומר שהן חסומות בנורמת מקסימום, וראינו שזה שקול לחסימות בנורמה הסטנדרטית). וסגורות (על פי סעיף הראשון של השאלה). לכן $X \times Y$ חסומה וסגורה ולכן קומפקטית.

4. הוכחה: אם X קומפקטית, אזי היא חסומה ולכן $[a,b]\,X$ חסומה. כמו כן, X סגורה ונראה שגם $[a,b]\,X$ סגורה. נשים לב, ש $[a,b]$ היא גם קומפקטית. תהי $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת ב $[a,b]\,X$. לכל n קיימים $t_n \in [a,b]$ ו $x_n \in X$ כך ש $y = t_n x_n$ (ההצגה הנ"ל לא בהכרח יחידה). כיוון ש X קומפקטית ל $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ קיימת תת-סדרה מתכנסת $\{x_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ לאיבר $x \in X$. כיוון ש $[a,b]$ קומפקטית (קטע סגור הוא חסום וסגור...) קיימת ל $\{t_{n_m}\}_{m=1}^{\infty}$ תת-סדרה מתכנתסת $\left\{t_{n_{m_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ ל $t \in [a,b]$. אזי

$$\lim_{k\to\infty} y_{n_{m_k}} = \lim_{k\to\infty} t_{n_{m_k}} x_{n_{m_K}} = tx \in [a,b]X$$

מצד שני, $\lim_{k\to\infty} y_{n_{m_k}} = \lim_{n\to\infty} y_n = y$. קיבלנו, $y = tx \in [a,b]\,X$. ולכן, $[a,b]\,X$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית.

(א) הפרכה: ניקח $X = (0,1)$ ו $Y = [0,1]$. $X = X \cap Y = (0,1)$ שהיא לא קבוצה קומקטית.

(ב) הפרכה: ניקח $X = \{1\}$, $x = 1$. $X \setminus \{x\} = \emptyset$ והיא קבוצה קומפקטית.

(ג) הוכחה. אם $x \in X$ היא נקודת מבודדת של X, אזי קיים $r > 0$ כך ש $(B(x,r) \setminus \{x\}) \cap X = \emptyset$. ז"א, $B(x,r) \setminus \{x\} \subseteq X^c$ ובפרט לכל סביבה של x, קיים כדור פתוח ברדיוס $\epsilon > 0$ שמוכל ב X^c ובפרט מכיל נקודה של X^c ולכן x היא נקודת הצטברות של X על פי ההגדרה.

(ד) הוכחה: על פי ההגדרה $X^\circ \subseteq X$ ויש שוויון אם ורק אם X פתוחה $X \subseteq \overline{X}$ ויש שוויון אם ורק אם X סגורה. לכן $X^\circ \subseteq \overline{X}$. מצד שני ההכלה היא ממש, כי אם $X^\circ = \overline{X}$ אזי $X = X^\circ$ וגם $X = \overline{X}$, ז"א X גם פתוחה וגם סגורה בסתירה להנחה.

(ה) הפרכה: ניקח $A = \left\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}, n \neq 0\right\}$. נקודת הצטברות היחידה של הקבוצה היא 0 ולכן $A' = \{0\}$. מצד שני, A' סופית, ולכן אין לה נקודות הצטברות ולכן $(A')' = \emptyset$.

תרגיל 2. עבור כל אחת מהקבוצות הבאות, קבעו אם היא פתוחה, סגורה, קומפקטית (ייתכן שאף אחד מאלה לא מתקיים). נמקו את תשובתכם.

1. $A = \left\{\frac{a}{2^n} \middle| a, n \in \mathbb{N}, a < 2^n\right\}$.
2. $A = (0,1) \times [0,1]$.
3. $A = \left\{(x,y,z) \middle| e^{xy} + z^2 \leq 2\right\}$.
4. $A = \left\{(x,y) \middle| x + y^3 > 0, x > 0, y < 0\right\}$.
5. $A = \left\{(x,y,z) \middle| x^2 + y^2 + z^2 < 1 \wedge x^2 + y^2 + z^2 \neq \frac{1}{4}\right\}$
6. $A = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in B(0,1) \middle| \forall n \in \mathbb{N}, \|x\| \neq \frac{1}{n}\right\}$.

פתרון.

1. הקבוצה A היא אוסף של כל הרציונליים בין גדולים מ 0 וקטנים מ 1 שהמכנה הוא חזקה של 2. הקבוצה אינה פתוחה, כיוון שעוצמתה קטנה מ א, מצד שני אינה סגורה, כיוון לכל ממשי בין 0 ל 1 קיימת סדרה של שברים עם מכנה חזקה של 2 שמתכנסת אליו. דרך אחת לראות את זה, היא לקחת פיתוח של כל מספר בין 0 ל 1 בבסיס 2. באופן שקול, לכל מספר $0 < a < 1$ נבנה סדרה של איברים ב A באופן הבא. a_0 הוא המספר המקסימלי מהצורה $\frac{1}{2^k}$ אשר קטן מ a. בהינתן $a_0, a_1, \dots a_n$ נגדיר

$$a_{n+1} = \max\left\{a_n + \frac{1}{2^k} | k \in N \wedge a_n + \frac{1}{2^k} < a\right\}.$$

עברור, ש $\{a_n\}$ היא סדרה של איברים ב A (קל לראות באינדוקציה - סכום של שני שברים שהמכנה של שניהם הוא חזקה של 2 הוא גם שבר שהמכנה הוא חזקה של 2) שמתכנס ל a. הקבוצה אינה קומפקטית מכיוון שאינה סגורה.

2. הקבוצה אינה פתוחה כיוון ש $(0,1)$ היא לא נקודה פנימית של הקבוצה (כזכור, בקבוצה פתוחה כל הנקודות הן נקודות פנימיות). מצד שני, הקבוצה אינה סגורה, כיוון ש $A \not\ni (0,0) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}, 0\right)$ אבל $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in A$ לכל A. הקוצבה אינה קומפקטית כיוון שאינה חסומה.

3. הקבוצה אינה פתוחה, שאם נקודה שמקיימת $e^{xy} + z^2 = 2$, אם $z > 0$ אזי $(x,y,z) \in A$, מצד שני לכל $2 < e^{xy} + (z+\epsilon)^2$ ולכן (x,y,z) אינה נקודה פנימית. מצד שני, $e^{xy} + z^2$ היא סגורה, מפני שלכל סדרה x_n, y_n, z_n שמתכנסת ומקיימת $e^{x_n y_n} + z_n^2 \leq 2$ אזי $\lim_{n\to\infty} e^{x_n y_n} + z_n^2 \leq 2$ ולכן A סגורה על פי קריטריון של סדרות מתכנסות. הקבוצה אינה קומפקטית בגלל שאינה חסומה. זאת כיוון אם נקבע $y = 0, z = 0$ נוכל לקחת x גדול כרצוננו.

אופן כמו בשאלה הקודמת, על ידי שימוש בסדרות, מראים שהקבוצות $\{(x,y) | y \leq 0\}, \{(x,y) | x \geq 0\}, \left\{(x,y) | x + y^3 \leq 0\right\}$ הן סגורות. הקבוצה ולכן משלים של כל אחת מהן היא פתוחה. A מתקבלת על ידי חיתוך של המשלימים ולכן פתוחה כחיתוך סופי של פתוחות. הקוצבה אינה סגורה, כיוון שהסדרה $\left(2, \frac{1}{n}\right)$ היא סדרה של איברים ב A שמתכנסת ל $(2,0)$ שהוא לא איבר של A. הקבוצה אינה קומפקטית מכיוון שאינה סגורה.

5. A היא חיתוך של כדור פתוח אם המשלים של הקבוצה $\left\{(x,y,z) | x^2 + y^2 + z^2 = \frac{1}{4}\right\}$ שהיא סגורה, שזאת קל לראות על ידי שימוש בסדרות מתכנסות. כידוע, משלים של קבוצה סגורה הוא פתוחה, ולכן A פתוחה כחיתוך של 2 פתוחות. הקבוצה אינה סגורה, כי הסדרה $\left\{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n}, 0, 0\right)\right\}_{n=3}^{\infty}$ היא סדרה של איברים ב A שמתכנסת ל $\left(\frac{1}{4}, 0, 0\right)$ שהוא לא איבר של A. שוב, הקבוצה אינה סגורה כיוון שאינה קומקטית.

6. הקבוצה אינה פתוחה, כיוון ש 0 היא נקודה שלא נקודה פנימית של הקבוצה (לכל כדור ברדיוס ε, ניקח $x = \left(\frac{1}{n}, 0, \dots, 0\right)$ כך ש $\frac{1}{n} < \varepsilon$, $x \in B(0,\varepsilon) \cap A^c$ ולכן לא קיים כדור פתוח ברדיוס ε שמוכל A. הקבוצה אינה סגורה, כי הסדרה $\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi^n}, 0, \dots 0\right)$ היא סדרה של איברים ב A שהגבול שלה לא $\left(\frac{1}{2}, \dots 0\right)$. הקבוצה אינה קומקטית כיוון שאינה סגורה.

תרגיל 3. תהי $X \subseteq \mathbb{R}$, ו $f : X \to \mathbb{R}$ רציפה. נגדיר את הגרף של f על ידי

$$\Gamma_f = \{(x, f(x)) | x \in X\}.$$

ענו על השאלות הבאות:

1. הוכיחו/הפריכו: אם $X\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה, ו $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה אזי Γ_f היא קבוצה סגורה.

2. הוכיחו/הפריכו: אם $X\subseteq\mathbb{R}$, $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה, Γ_f היא קבוצה סגורה.

3. נגדיר $S=\left\{(x,y)\,\middle|y=\frac{1}{x},x>0\right\}$. הראו, שקיימת $f:X\to\mathbb{R}$ כך ש $S=\Gamma_f$. האם S סגורה?

4. הוכיחו/הפריכו: אם $S\subseteq\mathbb{R}^2$ היא קבוצה סגורה, אזי ההיטל של S על ציר ה X, המוגדר על ידי $\{x|\,(x,y)\in S\}\subseteq\mathbb{R}$ היא קבוצה סגורה.

5. הוכיחו/הפריכו: אם $X\subseteq\mathbb{R}$ ו $f:X\to\mathbb{R}$ רציפה, אזי $(\Gamma_f)^\circ=\emptyset$ (הפנים של Γ_f היא קבוצה ריקה).

פתרון.

1. הוכחה. תהי $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^\infty$ סדרה של איברים ב Γ_f ונניח שהיא מתכנסת ל (x,y). אזי היא מתכנסת רכיב, רכיב ולכן $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ ו $\lim_{n\to\infty}y_n=y$. מצד שני, לכל n, $y_n=f(x_n)$ ועל פי קריטריון היינה של רציפות, אם f רציפה ו $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ אזי $\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x)$. קיבלנו ש $y=f(x)$ ולכן $(x,y)\in\Gamma_f$.

2. הקבוצה אינה בהרכח סגורה. ניקח $X=(0,1)$ ו $f(x)=1$. הסדרה $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}_{n=1}^\infty$ היא סדרה ב Γ_f, שמתכנסת ל $(0,0)$ שהוא לא איבר של Γ_f .

3. $S=\Gamma_f$ עבור $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x)=\frac{1}{x}$. הקבוצה סגורה, שכן היא מתכדת עם הקבוצה $\{(x,y)\,|xy=1\}$ שהיא קבוצה סגורה על פי קריטריון של סדרות מתכנסות. זה קורה בגלל שאם $\{(x_n,y_n)\}_{n=1}^\infty$היא סדרה ב S שמתכסת ל (x,y) אזי $xy=\lim_{n\to\infty}x_ny_n=1$. ולכן $y=\frac{1}{x}$. מצד שני, $x>0$ מכיוון ש $x_n>0$.

4. הרפכה: ההיטל של S מהדוגמה הקודמת על ציר X הוא הקבוצה $(0,\infty)$ שהיא קבוצה שאינה סגורה. מצד שני, ראינו ש S בעצמה היא סגורה.

5. ל Γ_f אין נקודות פנימיות, שכן לכל $(x,f(x))$ ב Γ_f, לכל $\varepsilon>0$, $(x,f(x)+\frac{1}{2}\varepsilon)\in B((x,f(x)),\varepsilon)$ אבל מצד שני $(x,f(x)+\varepsilon)\notin\Gamma_f$ כיוון ש f הוא יחס חד-ערכי.

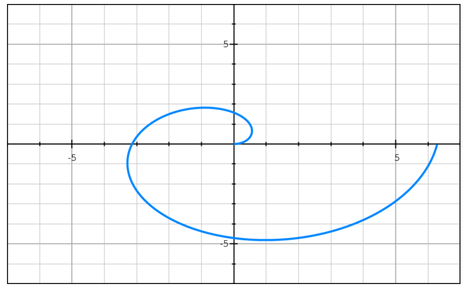
תרגיל 4. מצאו את הסגור $\overline{A}$, הפנים A°, והשפה ∂A של A בכל אחד מהמקרים הבאים.

1. תיבה פתוחה n-מימדית ב $\mathbb{R}^n$ המוגדרת על ידי: $A=(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_n,b_n)$.

2. תיבה סגרורה n-מימדית המוגדרת על ידי $\mathbb{R}^n$ על ידי: $A=[a_1,b_1]\times\ldots[a_n,b_n]$.

3. $A=B(0,1)\cap\left(\mathbb{R}^2\setminus\left\{(x,y)\,\middle|x=0\wedge y=0\right\}\right)$.

4. $A=\{(t\cos t,t\sin t)\,|0\le t\le 2\pi\}$. (הדרכה, השתמשו ברציפות ובקומפקטיות, כמו כן, תנסו להבין מדוע העקום באיור המצורף הוא שווה ל A) .



5. $A = \left\{ r\left(t\cos t, t\sin t\right) \middle| 0 \le r \le t, 0 \le t \le 2\pi \right\}$. (הדרכה: השתמשו באחד מהסעיפים שהוכחתם בשאלה 1 בתריל הנוכחי).

פתרון. בסעיפים 1 ו 2 הסגור הוא התיבה הסגורה, הפנים הוא התיבה הפתוחה והשפה היא כל הנקודות שלפחות אחת הקואורדינטות i, $x_i = \{a_i, b_i\}$. דהיינו:

$$\left\{ (x_1, \ldots, x_n) \mid (\forall 1 \le i \le n : x_i \in [a_i, b_i]) \wedge (\exists 1 \le i \le n : x_i \in \{a_i, b_i\}) \right\}.$$

בסעיף 3 הקבוצה היא כדור היחידה המנוקב. הסגורה הוא כדור היחדה הסגור, הפנים הוא הקבוצה עצמה, שכן היא פתוחה והספה היא ספרת היחידה (אוסף כל הנקודות עם נורמה שווה ל 1 וראשית הצירים).

בסעיף 4 הקבוצה היא תמונה של הקטע $[0,1]$ תחת פונקציה קומפקטית ולכן קומקטית, בפרט סגורה והסגור שלה הוא הקבוצה עצמה. הפנים שלה ריק, שכן לכל נקודה $(t\cos t, t\sin t)$ ניתן למצוא נקודה קרובה אליה כרצוננו, $(t+\epsilon)(\cos t, \sin t)$ שאינה בקבוצה ולכן לכל t, $(t\cos t, t\sin t)$ אינה נקודה פנימית. הספה של הקבוצה היא הקבוצה עצמה (סגור פחות פנים הוא הקבוצה פחות קבוצה ריקה שהוא בדיוק הקבוצה).

בסעיף 5 הקבוצה שוב קומפקטית כתמונה של המשולש $\{(r,t) \,|0 \le r \le t, t \le 2\pi\}$ שהוא קבוצה חסומה וסוגרה תחת פונקציה רציפה. הפנים של הקבוצה הוא .

$$\{(r\cos t, r\sin t) \,|0 < r < t, t < 2\pi\}.$$

השפה של הקבוצה היא העקום על האיור, יחד אם הקטה $\{0\} \times [0, 2\pi]$. קל לנמק את הטענות הללו על ידי שימוש בפונקציות רציפות, אמנם לא ביקשו נימוק בשאלה.