תרגיל בית 1 - תורת גלואה

סמסטר א', תשע"ז

שאלה 1. קבעו האם הפולינומים הבאים הם פריקים או אי-פריקים בחוגים המצויינים :

1. $3x - 7x - 5$, $\mathbb{Q}[x]$.
2. $x^3 - 7x + 2$, $\mathbb{Z}_5[x]$.
3. $x^3 - 6x - 9$, $\mathbb{Q}[x]$.
4. $x^4 + 4^3 + 6x^2 + 2x + 1$, $\mathbb{Q}[x]$.
5. $x^3 - x^2 + x + 3$, $\mathbb{Q}[x]$.

שאלה 2. מצאו את הפירוק של הפולינום $x^4 + 2x^2 - 8$ לגורמים אי פריקים בחוגים הבאים :

1. $\mathbb{C}[x]$
2. $\mathbb{R}[x]$
3. $\mathbb{Q}[x]$
4. $\mathbb{Z}_7[x]$

שאלה 3. בנו שדה ממאפיין 3 וגודל 9. רשמו את כל האיברים שלו.

שאלה 4. קראו את הנספח על מציאת שורשים של פולינומים מדרגות נמוכות.

1. פתרו את $x^3 - 3x^2 + 5x + 1 = 0$
2. פתרו את $x^4 - x - 1 = 0$ עד שאתם מגיעים לפולינום מדרגה 3 (אין צורך לפתור עד הסוף).

שאלה 5. יהי $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ פולינום כך ש $f(0), f(1)$ והמקדם העליון (המוביל) הם אי-זוגיים, הוכיחו כי ל $f(x)$ אין שורשים רציונליים.

שאלה 6. [בונוס חשוב] לכל שדה (ולמעשה לכל חוג) אפשר לבנות הומומורפיזם $\mathbb{Z} \to F$ ע"י כך ששולחים $1 \mapsto 1_F$.

הוכיחו כי הגרעין הוא $n\mathbb{Z}$ אם ורק אם המאפיין של F הוא n.

הוכיחו כי n הוא תמיד ראשוני (רמז: אם זה לא ראשוני, אפשר למצוא מחלקי אפס).

הסיקו שכל שדה מכיל עותק של (כלומר תת שדה שאיזומורפי ל-) $\mathbb{Z}_p$ או $\mathbb{Z}$.