

שיעורי בית 6

1. יהיו $u, v \in V$ שני וקטורים כך $|u| = |v|$. הוכיחו כי קיימת $T : V \rightarrow V$ אוניטרית כך ש $T(u) = v$. [הדרכה: התחילו במקרה ש $|u| = |v| = 1$]

2. תהא $T : V \rightarrow V$ נורמלית. הוכיחו כי

(א) לכל k טבעי מתקיים כי T מתחלפת עם $(T^*)^k$

(ב) לכל k טבעי מתקיים כי T^k נורמלית.

3. יהי T אופרטור נורמלי. הוכיחו:

(א) $\ker T = \ker T^*$

(ב) $\operatorname{Im} T = \operatorname{Im} T^*$

(ג) לכל k טבעי, $\ker T^k = \ker T$

(ד) לכל k טבעי, $\operatorname{Im} T^k = \operatorname{Im} T$

4. תרגיל: $T : V \rightarrow V$ הרמיטית שכל הע"ע שלה אי שליליים. הוכיחו שקיימת S הרמיטית כך ש $T = S^2$

5. תרגיל: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ סימטרית עם ע"ע אי שליליים. אזי: $\operatorname{tr}(A^2) \leq (\operatorname{tr} A)^2$