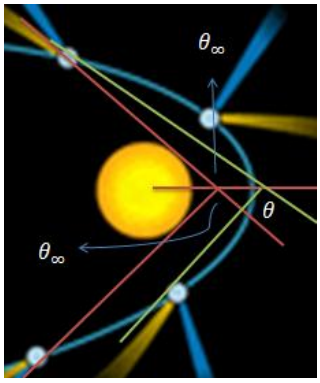
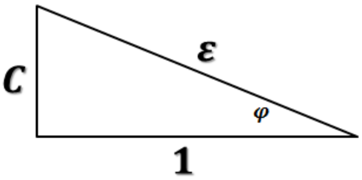
הרצאה XXIII- מכניקה

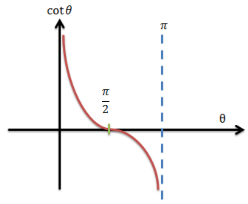


בהרצאה הקודמת ראינו שמתקיים: $r(\theta) = \frac{r_0}{1+\varepsilon\cos\theta}$ כאשר $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2EL^2}{G^2M^2m^3}$, $r_0 = \frac{L^2}{GMm^2}$.
הוכחנו גם את החוק השלישי של קפלר, ומצאנו את r_0 ע"י חישוב פשוט. מתקיים: $-mr\omega^2 = -\frac{GMm}{r^2}$
נבודד כדי לקבל $\frac{GMm^2r^4}{L^2} \underbrace{=}_{L=mr^2\omega} \frac{GM}{\omega^2}$ ולכן $r^3 = $, $r = \frac{L^2}{GMm^2}$.

סיימנו את השיעור עם דיבורים על שביט, וחיפשנו את הזווית (θ) שממנה והלאה הוא יוצא לאינסוף. ע"פ הסרטוט שמימין נסיק שמתקיים $\theta = 2\theta_\infty - \pi$. ולכן $\theta = 2\cos^{-1}\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) - \pi = \pi - 2\cos^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)$.
נגדיר b כך שיתקיים $L = mbv_0$, ואז $\varepsilon^2 = 1 + \frac{2Eb^2v_0^2}{G^2M^2m}$.



נביט במשולש שמשמאל, ונראה שמתקיים $\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = tg^{-1}(C)$. וגם מתקיים $C = \sqrt{\varepsilon^1 - 1} = \sqrt{\frac{2E}{m}} \cdot \frac{bv_0}{GM}$. לכן מתקבל $\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{bv_0^2}{GM}$



אם נציב בביטוי הקודם נקבל ע"פ הפיתוחים(גם $E = \frac{1}{2}mv_0^2$)
$\pi - \theta = 2\,\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{bv_0^2}{GM}\right)$. . ואז מתקבל עבור קטונגנס הזווית
$\frac{bv_0^2}{GM} = tg\left[\frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2}\right] = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$. הגרף המתקבל עבור קוטנגנס הזווית הוא זה המופיע מימין.

המרצה ביצע חזרה מהירה על המושג תנע זוויתי וטורק: (העתקי את הדוגמאות מהרצאה 21)

דוגמא 1: תנועה מעגלית סטנדרטית, מהירות זוויתית קבועה ולכן מתקיים $\vec{v} = r\omega\hat{\theta}$. אם נחשב את התנע הזוויתי לפי הגדרה, נקבל $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\vec{r}\times\vec{v} = mr^2\omega\hat{r}\times\hat{\theta} = mr^2\omega\hat{z}$.

דוגמא 2: נניח גוף נקודתי שנע לאורך קו ישר המקביל לציר x. מתקיים $\vec{v} = v\hat{x}$, ולכן $\vec{r} = \sqrt{x^2+y^2}\hat{r}$. נציב הכל בנוסחה לתנע הזוויתי ונקבל $\vec{L} = \vec{r}\times\vec{p} = m\sqrt{x^2+y^2}\hat{r}\times v\hat{x} = mv\sqrt{x^2+y^2}\sin\theta\,\hat{z}$. וידוע כי מתקיים $\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ לכן אם נציב זאת יחד עם הביטוי נקבל $\vec{L} = -mvy\hat{z}$.

דוגמא 3: מטוטלת שנעה בתנועה מעגלית, החוט באורך l, הרדיוס r, והמסה של החלקיק שבקצה המטוטלת היא m. המיקום של החלקיק נתון ע"י $\vec{R} = -lcos\alpha\hat{z} + lsin\alpha\hat{r}$. ולכן $\vec{v} = r\dot{\theta}\hat{\theta} = \omega l\sin\alpha\,\hat{\theta}$ וע"פ הגדרת התנע הזוויתי, נציב את כל מה שפיתחנו ונקבל $\vec{L} = m\vec{r}\times\vec{v} = \omega ml^2[-\cos\alpha\,\hat{z} + \sin\alpha\,\hat{r}]\times\sin\alpha\,\hat{\theta} = m\omega l^2\sin\alpha\,[\cos\alpha\,\hat{r} + \sin\alpha\,\hat{z}]$. נחשב את גודל הווקטור ע"י מכפלת הווקטור בעצמו, ונקבל $|\vec{L}| = \sqrt{|\vec{L}|^2} = \cdots = m\omega l^2\sin\alpha$.

חשוב לזכור ש$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext}$ וגם $\frac{d\mathrm{L}}{dt} = \tau$. נקבל גם את החוק $\frac{d\vec{L_T}}{dt} = \vec{\tau}_{ext}$. נוכיח אותו עבור מקרה פרטי.

הוכחה: עבור המקרה בציור משמאל. עבור כל חלקיק נמצא את מומנט הסיבוב.

עבור כל גוף וגוף
$$\bar{\tau}_1 = \bar{r}_1\times[f_{2,1}(r_{2,1})[\bar{r}_1-\bar{r}_2]+f_{3,1}(r_{3,1})[\bar{r}_1-\bar{r}_3]+f_{ext,1}] = -f_{2,1}(r_{2,1})\bar{r}_1\times\bar{r}_2 - f_{3,1}(r_{3,1})\bar{r}_1\times\bar{r}_3 + \bar{r}_1\times\bar{f}_{ext,1}$$
$$\bar{\tau}_2 = \bar{r}_2\times[f_{1,2}(r_{2,1})[\bar{r}_2-\bar{r}_1]+f_{3,2}(r_{2,3})[\bar{r}_2-\bar{r}_3]+f_{ext,2}] = +f_{1,2}(r_{2,1})\bar{r}_1\times\bar{r}_2 - f_{3,2}(r_{3,2})\bar{r}_2\times\bar{r}_3 + \bar{r}_2\times\bar{f}_{ext,2}$$
$$\bar{\tau}_3 = \bar{r}_3\times[f_{1,3}(r_{3,1})[\bar{r}_3-\bar{r}_2]+f_{2,3}(r_{2,3})[\bar{r}_3-\bar{r}_2]+f_{ext,3}] = f_{1,3}(r_{3,1})\bar{r}_1\times\bar{r}_3 + f_{2,3}(r_{3,2})\bar{r}_2\times\bar{r}_3 + \bar{r}_3\times\bar{f}_{ext,3}$$
. אם נבצע את הסכימה כראוי, נקבל $\bar{\tau}_{\mathrm{T}} = \bar{r}_1\times\bar{f}_{ext,1} + \bar{r}_2\times\bar{f}_{ext,2} + \bar{r}_3\times\bar{f}_{ext,3} = \sum\bar{r}_i\times\bar{f}_{ext,i} = \bar{\tau}_{T,ext}$. ומכאן ההמשך ברור, והוכחנו את החוק.

מכאן נוח מאוד לעבור לנושא של גוף קשיח.

<u>גוף קשיח</u>:
נתייחס אל הגוף כאל המון גופים קטנים. מתקיים $\bar{L} = m_il_ir_i\omega(\sin\alpha_i\,\hat{z} + \cos\alpha_i\,\hat{r})$ וגם $\mathrm{L}_z^i = m_ir_i^2\omega$. נכליל כדי לקבל את הביטוי $L_z = \sum_i L_i = \omega\overbrace{\sum_i m_ir_i^2}^{I}$. אומרים ש$I$ הוא מומנט ההתמד, או באנגלית *Moment of Inertia*. הביטוי הוא עבור גופים בדידים, בתרגיל הבית נוכיח עבור דיסקרטיים.
ובאופן כללי, נקבל נוסחה חדשה $\frac{dL}{dt} = I\frac{d\omega}{dt} = \bar{\tau}_{ext}$. אם הטו הוא אפס, נקבל ש$I\omega$ קבוע, כמו שניתן לראות ברקדניות על קרח. ברגע שהן סוגרות את הידיים שלהן הן מתחילות להאיץ, כי הן מקטינות את I מה שגורם להגדלה של ω .