<u>הסתברות הרצאה - 1-8/5</u>

← $n=R(k)$, אז n המינימלי כך שבכל צביעה של הקשתות (בדיאגרמת Hasse של יחס על $\{1,\dots,n\}$), ובכחול יש או k מס' שכל הקשתות ביניהם כחולות או k כך שכל הקשתות ביניהם אדומות.

רוצים להראות - $R(k)\geqslant 2^{\lceil k/2\rceil}$, עבור k גדול מספיק.

צריך להראות שיש צביעה של הקשתות בכחול/באדום ללא התכונה הנ"ל.

← קבענו - $n=2^{\lceil k/2\rceil}$

← צבענו את קשתות הדיאגרמה באקראי (כחול בהסת' $\frac{1}{2}$ ובאדום בהסת' $\frac{1}{2}$ באופן ב"ת בבחירות האחרות).

← נסמן ב-X את מס' ה-k-יות שכל הקשתות ביניהם כחולות: $E(X)=\binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$

← לכל k מספרים נגדיר מ"מ מציין X_j שערכו 1 אם כל הקשתות כחולות 0 אחרת.

$$P(X_j=1)=\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

← $X=\sum X_j$

$$E(X)=\sum E(X_j)=\sum\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}=\binom{n}{k}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}}$$

<u>הבחנה:</u> לכל $0\leq k\leq n$ $\quad \binom{n}{k}\leq\left(\frac{en}{k}\right)^k$

<u>נראה:</u> $\quad \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\leq\left(\frac{en}{k}\right)^k$

<u>הוכחה:</u> $\quad (1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i\geqslant\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}x^i \quad$ (אם $x>0$)

$$\Rightarrow\frac{(1+x)^n}{x^k}\geqslant\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}x^{i-k}$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{\binom{n}{i}}{x^{k-i}}\geqslant\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}$$ אם $0<x\leq 1$ אז -

נבחר $x=\frac{k}{n}$.

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\leq\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^n}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}\leq\frac{\left(1+\frac{k}{n}\right)^{\frac{n}{k}\cdot\frac{k}{n}\cdot n}}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}\leq\frac{e^k}{\left(\frac{k}{n}\right)^k}=\left(\frac{en}{k}\right)^k$$

$$E(X)\leq\left(\frac{en}{k}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k(k-1)}{2}}=\left(\frac{en}{k}\cdot 2^{-\frac{k-1}{2}}\right)^k=\left(\frac{e2^{\lceil k/2\rceil}}{k}\cdot 2^{-\frac{k}{2}}\cdot 2^{\frac{1}{2}}\right)^k<\frac{1}{2}$$

$k>6$

← מא"ש מרקוב - $\quad P(X\geqslant 1)\leq E(X)<\frac{1}{2}$

← יהא Y מ"מ שסופר k-יות אדומות $\quad P(Y\geqslant 1)<\frac{1}{2}$

$$P(X\geqslant 1 \text{ או } Y\geqslant 1)\leq P(X\geqslant 1)+P(Y\geqslant 1)<1$$

הסתברות הרצאה 8/5-2

← בהסג׳ $0<$, $x=0$, וגם $y=0$

← יש צביעה של הקשתות ללא k-יה כחולה וללא k-יה אדומה.

← שימו ♡ שבהסג׳ $\xrightarrow{k\to\infty} 1$, צביעה מקרית — לא מכילה k-יה מאותו צבע.

$$2^{k/2} \le R(k) \le 4^k$$

$$\sqrt{2} \le (R(k))^{1/k} \le 4$$

1. הראו ש- $\lim_{k\to\infty} (R(k))^{1/k}$ קיים.

2. מצאו את הגבול הנ״ל.

שאלת חזרה - נגדיר סדרת מ"מ: $X_0=x$

לכל $n>0$ $\quad X_{n+1}\sim Pois(X_n)$

1) חשבו $E(X_n)$

2) -"- $V(X_n)$

3) -"- $Cov(X_m,X_n),\ m>n$

4) הראו ש- X_j-X_i ו- X_m-X_n, בלתי מתואמים. $(m>n>j>i)$

תשובה -

1) ← תוחלת של מ"מ פואסוני עם פרמטר λ היא λ.

← $E(X)=E_Y(E_X(X|Y))$

$$E(X_{n+1}|X_n)=X_n$$

$$E(X_{n+1})=E_{X_n}(E_{X_{n+1}}(X_{n+1}|X_n))=$$

$$=E_{X_n}(X_n)=E(X_n)\overset{\text{אינדוקציה}}{=}\lambda$$

2) ← שונות של מ"מ פואסוני עם פרמטר λ היא λ.

← $V(X)=V_Y(E_X(X|Y))+E_Y(V_X(X|Y))$

$$V(X_{n+1})=V_{X_n}(E_{X_{n+1}}(X_{n+1}|X_n))+E_{X_n}(V_{X_{n+1}}(X_{n+1}|X_n))=$$

$$=V_{X_n}(X_n)+E_{X_n}(X_n)=V(X_n)+E(X_n)=V(X_n)+\lambda$$

$$\Rightarrow V(X_n)=n\lambda$$

3) ← $Cov(X,Y)=E(X|Y)-E(X)E(Y)$

$$E(X_m\cdot X_n)=E_{X_n}(E(X_m\cdot X_n|X_n))=E_{X_n}(X_n\cdot E(X_m|X_n))$$

$$E(X_m|X_n)=X_n$$

כי זהו אותו תהליך, רק מתחיל עם ערך של X_n - כמו שציינו בסעיף 1

הסתברות הרצאה - 5|8 - 3

$$= E_{x_u}(x_u \cdot x_u) = E(x_u^2) = V(x_u) + E(x_u)^2 =$$

$$= u\lambda + \lambda^2$$

$$\mathrm{cov}(x_m, x_u) = u\lambda + \lambda^2 - \lambda^2 = u\lambda$$

Y) ← X ו-Y בלתי מתואמים אמ"מ - $\mathrm{cov}(x,y)=0$.

← הלינאריות של ה-cov: $\mathrm{cov}(ax+by, z) =$

$$= a\,\mathrm{cov}(x,z) + b\,\mathrm{cov}(y,z)$$

וכנ"ל לינאריות במשתנה השני.

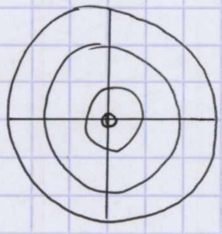
$$\mathrm{cov}(x_m - x_u, x_j - x_i) = \mathrm{cov}(x_m, x_j - x_i) - \mathrm{cov}(x_u, x_j - x_i) =$$

$$= \mathrm{cov}(x_m, x_j) - \mathrm{cov}(x_m, x_i) - \mathrm{cov}(x_u, x_j) + \mathrm{cov}(x_u, x_i)$$

$$= j\lambda - i\lambda - j\lambda + i\lambda = 0$$

← הסתברות רציפה (חלק 2 של הקורס)

←מטרה



$X = -0.3182\ldots$

$Y = 0.521\ldots$

הסתברות הרצאה - 15/5 - 1

5. מרחבי הסת' כלליים (General Probability Spaces)

5.1 הקדמה (Introduction & Motivation)

דוגמה - אי קיום של מידה - אינווריאנטית.

← תזכורת - ראינו שמרחב הסת' בדיד (כאשר Ω סופית או בת מניה) מקיים:

1) $P(\Omega)=1$

2) אם $A_1,A_2,\ldots$ זרים בזוגות אז $P(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$

← נביט ב- $\Omega=[0,1]$, ניתן להגדיר התפלגות אחידה על Ω.

מה ההסתברות לקבל מס' ב-$(\frac{1}{2},\frac{2}{3})$? $\frac{1}{6}$

זו גם ההסת' לקבל מס' ב-$(0,\frac{1}{6})$.

← רוצים שההסת' לקבוצה ב-$[0,1]$ תהיה האורך שלה, ובפרט אינווריאנטית להזזה (הזזה לא תשנה את האורך שלה).

← נגדיר יחס שקילות מעל $[0,1]$ כך ש- $a\sim b$ אם $a=b+q$ עבור $q\in\mathbb{Q}$.

← נביט במחלקות השקילות ונבחר נציג מכל מחלקה (אקסיומת הבחירה) ונסמן את הקבוצה שקיבלנו ב-X. לכל רציונלי q, X זרה ל- $X+q(=\{x+q \mid x\in X\})$

אחרת יש $\begin{cases} a\in X \\ a\in X+q \end{cases} \Leftarrow a=x+q$

בסתירה לכך שבחרנו נציג אחד מכל מחלקת שקילות.

← נביט בקבוצות מודולו 1. עדיין X זר ל- $X+q$

$$\bigcup X+q \pmod 1 = [0,1] \quad (q\in[0,1]\cap\mathbb{Q})$$

זהו איחוד בן מניה, כלומר מס' הקבוצות הוא בן מניה. נרצה שהמידה של X והמידה של $X+q$ יהיו שוות לכל q (אינווריאנטיות להזזה). סתירה, אם מידת X אפס אז מידת $[0,1]$ היא אפס ואם מידת X חיובית אז מידת $[0,1]$ אינסופית.

5.2 הגדרות (Definitions)

מה נרצה ממרחב המאורעות?

- יכיל את Ω
- אם A מאורע אז $\bar{A}$ מאורע.
- אם A,B מאורעות אז $A\cup B$ מאורע
- איחודים כלליים?

הסתברות - הרצאה 2-15/5

הגדרה - תהא Ω קבוצה, אוסף F (אוסף של קבוצות) תתי קבוצות של Ω נקרא σ-אלגברה.

אם: 1) $\Omega \in F$

(ככל שה-F יותר מסובך— (F, F) זה אומר שזה אוסף של אוסף של... קבוצות)

2) $A \in F \to \bar{A} \in F$

3) אם $A_1, A_2, A_3 \ldots \in F$ אז $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in F$ (סגירות לאיחודים בני מנייה)

הערה - אם נחליף את 3 לאיחודים סופיים נקבל אלגברה של קבוצות.

דוגמא לאלגברה שאינה σ אלגברה - אוסף הקבוצות הסופיות או שמשלימן סופי — היא אלגברה מעל $\mathbb{N}$ אך אינה σ אלגברה.

טענה - אם F σ אלגברה אז:

1) F סגורה לאיחודים סופיים.

2) F סגורה לחיתוכים סופיים.

3) F סגורה לחיתוכים בני מנייה.

הוכחה - 1) מוסיפים $\emptyset$.

2) מוכיחים בעזרת דה-מורגן.

3) מוכיחים בעזרת דה-מורגן.

טענה - יהא $\mathcal{F}$ אוסף של σ אלגברות מעל Ω חיתוכן הוא σ אלגברה.

הוכחה - נבדוק את התנאים מההגדרה.

1) $\Omega \in F$ לכל $F \in \mathcal{F}$ ולכן $\Omega \in \cap \mathcal{F}$

2) אם $A \in \cap \mathcal{F}$ אז $A \in F$ לכל $F \in \mathcal{F}$ ולכן $\bar{A} \in F$ לכל $F \in \mathcal{F}$.

3) כנ"ל.

מסקנה - תהא T משפחה של תתי-קבוצות של Ω. אז יש σ אלגברה מינימלית ביחס להכלה המכילה את T. σ אלגברה זו נקראת ה-σ אלגברה הנוצרת ע"י T.

הערה - לכל Ω, $P(\Omega)$ (קבוצת החזקה) היא σ אלגברה.

הגדרה - מרחב הסתברות הוא שלשה סדורה (Ω, F, P) כאשר Ω היא קבוצה הנקראת "מרחב המדגם", F היא σ אלגברה מעל Ω הנקראת "מרחב המאורעות", P היא פונק' אי שלילית $P: F \to \mathbb{R}$ כך ש- 1) $P(\Omega)=1$

2) אם $A_1, A_2, \ldots \in F$ זרות בזוגות אז $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$

P נקראת פונק' ההסתברות.

הערה - ההגדרה מכלילה ממש את ההגדרה למרחב הסתב' בדיד (קח $F=2^{\Omega}$).

הסתברות - הרצאה 3 - 15/5

טענה - תהי P פונ' חיובית המוגדרת מעל σ אלגברה F (מעל Ω) כך שאם $A\cap B=\emptyset$ אז $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ ו-$P(\Omega)$. אז התנאים הבאים שקולים:

1) אם $A_1,A_2\ldots\in F$ זרות בזוגות אז $P(\bigcup A_i)=\sum P(A_i)$

2) אם $B_1\subseteq B_2\subseteq\ldots$ מאורעות אז $P(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n)=\lim_{n\to\infty}P(B_n)$

3) אם $C_1\supseteq C_2\supseteq\ldots$ מאורעות אז $P(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n)=\lim_{n\to\infty}P(C_n)$

הוכחה - $1\to 2$: נסמן $A_1=B_1$ ו-$A_n=B_n\setminus B_{n-1}$. כעת המאורעות A_n זרים בזוגות.

כמו כן $B_n=\bigcup_{i=1}^{n}A_i$ ולכן $P(B_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)$ (*)

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)\underset{\text{מ-1}}{=}\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n)\underset{(*)}{=}\lim_{n\to\infty}P(B_n)$$

הסתברות - הרצאה - 2/5 - 1

תזכורת - מרחב הסתברות (Ω, F, P) (F — σ אלגברה)

טענה - אם Ω קב' F σ אלגברה, ו-P כך ש- 1) $P(\Omega)=1$

2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ אם $A\cap B=\emptyset$

אז - 1) אם $A_1, A_2, \ldots$ זרות בזוגות - אז - $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n)=\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$

2) אם $B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ אז - $\lim P(B_n)=P(\bigcup B_n)$

3) אם $C_1 \supseteq C_2 \supseteq \ldots$ אז - $\lim P(C_n)=P(\bigcap C_n)$

דוגמה - $\Omega=[0,1]$, ה-σ אלגברה הנוצרת מהקטעים הפתוחים $F=$ ב- $[0,1]$

$$P(A)=\lim_{k\to\infty} 2k\cdot\lambda\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\cap A\right)$$

$$P(\Omega)=\lim_{k\to\infty} 2k\cdot\lambda\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\cap\Omega\right)=\lim_{k\to\infty} 2k\cdot\lambda\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\right)=\lim_{k\to\infty} 2k\cdot\tfrac{1}{2k}=1$$

אם $A\cap B=\emptyset$ אז $\to P(A\cup B)=\lim_{k\to\infty} 2k\cdot\lambda\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\cap(A\cup B)\right)=\lim_{k\to\infty} 2k\cdot\lambda\left(\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\cap A\right)\cup\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\cap B\right)\right)=$

$$=\lim_{k\to\infty} 2k\left(\lambda\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\cap A\right)+\lambda\left(\left(\tfrac{1}{2k},\tfrac{1}{k}\right)\cap B\right)\right)=P(A)+P(B)$$

מנגד, P אינה σ-אדיטיבית.

נביט בסדרת הקבוצות $[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})$

1. לכל n $\quad P([\frac{1}{n+1},\frac{1}{n}))=0$

(כי החל ממקום מסוים $(\frac{1}{2k},\frac{1}{k})\cap[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})=\emptyset$).

מנגד $\bigcup_{n=1}^{\infty}[\frac{1}{n+1},\frac{1}{n})=[0,1)$ ו- $P([0,1])=1$.

הגדרה - מרחב הסתברות מותנה.

יהיו (Ω,F,P) מרחב הסתברות, ותהי $B\in F$ כך ש- $P(B)>0$ אז המרחב $(B, F|_B, P(\cdot|B))$ כאשר $F|_B=\{A\in F \mid A\subseteq B\}$

$$P(\cdot|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

הוא מרחב הסתברות הנקרא מרחב ההסתברות המותנה.

5.3 משתנה מקרי (Random Variable)

הגדרה - ה-σ אלגברה על $\mathbb{R}$ הנוצרת ע"י הקטעים הפתוחים נקראת אלגברת בורל ומסומנת ב-B.

טענה - לכל $a<b$, $(a,\infty),(-\infty,b),[a,\infty),(-\infty,b],[a,b),(a,b],[a,b],\{a\}\in B$

כמו כן כל קבוצה בת מניה שייכת ל-B.

חלק מההוכחה - $(a,\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}(a,a+n)$

הסתברות הרצאה - 21/5 - 2

טענה - $\mathcal{B}$ היא ה-σ אלגברה הנוצרת ע"י הקרניים $(-\infty, b]$.

הוכחה - $(-\infty,b) = \bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, b-\frac{1}{n}]$

$$(a,b) = (-\infty,b) \cap \overline{(-\infty,a]}$$

הגדרה - יהי (Ω,F,P) מרחב הסתברות.

פונקציה $X:\Omega\to\mathbb{R}$ נקראת מ"מ אם לכל קבוצת בורל $B\in\mathcal{B}$, $X^{-1}(B)\in F$.

פונקציה כזאת נקראת פונ' מדידה.

הערה - השאלה אם X מ"מ נקבעת בלי קשר ל-P.

דוגמא - לכל פונקצית הסתברות P, הזהות היא מ"מ על $(\mathbb{R},\mathcal{B},P)$.

הערה - אם f רציפה ו-X מ"מ אז $f(X)$ גם מ"מ. (כי אם f רציפה אז המקור של קב' פתוחה היא קב' פתוחה). ההערה נכונה גם אם ל-f יש מס' בן מניה של נק' אי רציפות.

5.4 פונקצית התפלגות (Cumulative Distribution function)

הגדרה - פונ' $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ מונוטונית לא יורדת רציפה מימין והמקיימת $\lim_{x\to\infty}F(x)=0$ ו- $\lim_{x\to\infty}F(x)=1$

נקראת פונ' התפלגות (או פונ' הסתברות מצטברת או CDF).

טענה - יהי X מ"מ על $\mathbb{R}$ אז הפונ' $F_X(b)=P(X\le b)$ היא פונ' התפלגות.

הוכחה - 1) לכל $\varepsilon>0$ - $F(b+\varepsilon)=P(X\le b+\varepsilon)=P(X\le b)+P(b<X\le b+\varepsilon)\ge P(X\le b)=F(b)$

2) צ"ל לכל b- $\lim_{a\to b^+}F(a)=F(b)$

$$\lim_{a\to b^+} F(a)=\lim_{a\to b^+}P(X\le a)=\lim_{a\to b^+}P(X^{-1}(-\infty,a])$$

* לכל סדרה $a_n\to b$ מונוטונית לא עולה.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,a_n]=(-\infty,b] \quad \text{ו-} \quad (-\infty,a_n]\supseteq(-\infty,a_{n+1}]$$

אם נסמן $A_n=X^{-1}(-\infty,a_n)$ נקבל $A_{n+1}\subseteq A_n$

ומהטענה מסוף השיעור הקודם - $P(\cap A_n)=\lim P(A_n)$

$$\overset{\parallel}{P(X^{-1}(-\infty,b))}=P(X\le b)=F(b)$$

← איפה נשבר הסימטריה?

הסתברות - הרצאה - 2215-1

תזכורת - פונ' הסתברו_ $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

- פונ' מונוטוני_ לא יורד_.
- רציפה מימין
- $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$
- $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$

CDF

טענה - אם X מ"מ הפונקציה $F_X(b)=P(X\le b)$ היא פונ' הסתברו_.

הוכחה - 1) מונ' לא יורד_.

2) רציפה מימין.

$$\lim_{a\to b^+} F_X(a)=\lim_{a\to b^+} P(X\le a)=\lim_{a\to b^+} P(X^{-1}((-\infty,a]))=$$

הסבר - $\left[\begin{array}{c} =\bigcap_{n=1}^{\infty} X^{-1}((-\infty,a_n])=X^{-1}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty,a_n]\right)=X^{-1}((-\infty,b]) \\ \text{ראינו - } a_n \text{ סדרה מונ' יורד_ השואפ_ ל-b (מהגדרת הגבול לפי היינה)} \\ \lim P(X^{-1}((-\infty,a_n]))=P(X^{-1}((-\infty,b])) \end{array}\right]$ - הסבר

$$=P(X^{-1}((-\infty,b]))=P(X\le b)=F(b)$$

הסבר להסבר - אם $(\Omega,\mathcal{F},P)$ מרחב הסת' אז - אם $C_1\supseteq C_2\supseteq\ldots$ אז $\lim_{n\to\infty}(P(C_n))=P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}C_n\right)$

איפה נשברת הסימטריה?

אם $a_n\to b$ $(a_n<b)$ אז מגיעים ב- $(-\infty,b)$ - $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,b-\frac{1}{n})=(-\infty,b)$ $\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,a_n)=:\text{וכו'}\right)$

$$\lim_{x\to\infty} F(x)=\lim_{x\to\infty} P(X\le x)=\lim_{x\to\infty} P(X^{-1}((-\infty,x]))=P((-\infty,\infty))=P(\Omega)=1$$

המקרה הרביעי דומה לשלישי.

טענה - תהא F_X פונ' הסתברו_ אזי $P(X\le b)=F(b)$

הוכחה - (נגדיר מרחב הסתברו_ $(\mathbb{R},\mathcal{B},P)$ כאשר $\mathbb{R}$ = הממשיים, $\mathcal{B}$ = אלגברת בורל

ו- $P((-\infty,b])=F(b)$.

X יהיה הזהו_ (כלומר $X(x)=x$), ברור ש-$\mathbb{R},\mathcal{B}$ ו-X עונים על הדרישו_.

צ"ל ש-P פונקצי_ הסתברו_.

עד - הגדרנו את_ P על הקרניים השמאלי_ הסגורו_, שיוצרו_ את_ $\mathcal{B}$.

1) $P(\Omega)=1$

2) P אי שלילי_

3) σ - אדיטיבי_.

הסתברות - ~~הרצאה~~ - הרצאה 2

1) $P(\Omega)=P((-\infty,\infty))=\lim_{b\to\infty}P((-\infty,b])=\lim_{b\to\infty}F(b)=1$.

2+3) - יוכח בשיעור הבא.

הערה - אם F_X פונ' ההתפלגות ו-X מ"מ המוגדר ע"י $P(X\le b)=F(b)$

אז - $P(X=b)=P(X\le b)-P(X<b)=F(b)-\lim_{x\to b^-}F(x)$

(כי - $\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty,b-\frac{1}{n}]=(-\infty,b)$).

מסקנה - F רציפה אמ"מ $P(X=b)=0$ לכל $b\in R$.

הערות - 1) קב' נק' אי-הרציפות של פונ' ההתפלגות היא בת מניה.

2) קב' נק' אי-הגזירות של F היא ממידה (בהמשך הגדרה) 0.

3) קב' נק' אי-הגזירות יכולה להיות בעוצמת הרצף.

הגדרה - קב' X ב-R היא ממידה 0 אם לכל $\varepsilon>0$ יש איחוד בן מניה של קטעים פתוחים שאורכם הכולל קטן מ-ε והאיחוד מכסה את X.

5.5 פונ' צפיפות הסתב' (Probability density function)

הגדרה - פונ' אי שלילית $f:R\to R$ המקיימת $\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=1$

נקראת פונ' צפיפות (pdf).

הסתברות הרצאה - 22/5 - 1

5.5 פונ' צפיפות הסת' (Probability density function)

הגדרה- פונ' אי שלילית $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx=1$, נקראת פונ' צפיפות pdf.

← אם f פונ' צפיפות הסתברות אז הפונ': $F(b)=\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$

מגדירה פונקציה התפלגות רציפה בכל נקודה.

פונקציה זו מגדירה מ"מ רציף, כלומר בעל סיכוי 0 בכל נקודה.

5.6 תוחלת ושונות (Expectation and Variance)

הגדרה- יהא X מ"מ בעל צפיפות הסת' $f_X(x)$: $E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot x\,dx$

אם האינטגרל מתכנס.

טענה- אם g פונ' כך ש- $g(x)$ מ"מ, אז: $E(g(x))=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot g(x)\,dx$ (אם האינטגרל מתכנס).

הגדרה- השונות של מ"מ X היא: $V(X)=E(X^2)-(E(X))^2$, אם כל האינטגרלים מתכנסים.

תזכורת- ראינו שאם X מ"מ בדיד המקבל ערכים שלמים וחיוביים אז: $E(X)=\sum_{n=1}^{\infty} P(X\geq n)$

טענה- X מ"מ רציף המקבל ערכים חיוביים. אז: $E(X)=\int_0^{\infty}(1-F_X(x))dx$ (כאשר $F_X(t)=P(X\leq t)$)

הוכחה-

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot x\,dx=$$

$$=\int_0^{\infty} f_X(x)\cdot x\,dx=\left(x=\int_{t=0}^{x}1\cdot dt\right)=$$

$$=\int_0^{\infty} f_X(x)\cdot\int_{t=0}^{x}1\,dt\,dx=\int_{x=0}^{\infty}\int_{t=0}^{x} f_X(x)\,dt\,dx=$$

$$=\int_{t=0}^{\infty}\int_{x=t}^{\infty} f_X(x)\,dx\,dt=\int_{t=0}^{\infty}P(X>t)\,dt=\int_{t=0}^{\infty}1-F_X(t)\,dt$$

דוגמא- פרדוקס המעטפות:

← מגרילים X, שם צ'ק עם x ש"ח במעטפה ועוד צ'ק על סך 2x ש"ח במעטפה אחרת.

← אני בוחרת מעטפה במקרה.

← ראיתי 102 ש"ח.

← האם כדאי להחליף?

הוכחה- ← יש סיכוי של 50% שבמעטפה השניה יש $\frac{1}{2}x$ ו-50% שיש 2x ולכן:

$E(\text{מעטפה שניה})=\frac{204+51}{2}=127.5>102$

← כדאי להחליף $E(2nd)=\frac{2x+\frac{1}{2}x}{2}=1\frac{1}{4}x>x$

← נניח שהגרלת X בדידה עם צפיפות f_X

← נסמן ב-Y את הסכום שראיתי במעטפה: ←

הסתברות הרצאה- 5/12-2

$$f(x=y|y)=\frac{f_x(y)}{\frac{1}{2}f_x(y)+f_x(y/2)\cdot\frac{1}{2}}$$

5.7 ההתפלגויות משותפות ואי-תלות (Joint distribution & Independence)

(בקורס נניח שקיימת פונ' צפיפות משותפת).

הגדרה - פונ' צפיפות משותפת של שני מ"מ היא פונ' $f:R^2\to R$

המקיימת: $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy=1$

הגדרה - תהא $f_{x,y}$ פונ' צפיפות משותפת של x ו-y אז:

הפונ': $f_x(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f_{x,y}(x,y)\,dy$, נקראת פונ' הצפיפות השולית של x ובנ"ל ל-y.

הגדרה - אם x,y משתנים מקריים בעלי צפיפות משותפת $f_{x,y}$, ונסמן את $f_x(x)$ את הצפיפות השולית של x אז: $f_{y|x=x}(y)$

נקראת פונ' הצפיפות המותנית $=\frac{f_{x,y}(x,y)}{f_x(x)}$

הערה - אם ידועה הצפיפות המותנית של y ב-x, נסמנה g_x וידועה הצפיפות השולית של x, f_x אז: $f_{x,y}(x,y)=f_x(x)g_x(y)$

← נניח שהגרלנו x בידיעה עם צפיפות f_x.

← נסמן ב-y את הסכום שראינו במעטפה.

$$f(x=y|y)=\frac{f_x(y)}{\frac{1}{2}f_x(y)+f_x(y/2)\frac{1}{2}}$$

אם התוחלת של x סופית-

אין תוחלת- הרווח בהחלפה הוא 0.

הגדרה - מ"מ x ו-y נקראים ב"ת אם: $f_{x,y}(x,y)=f_x(x)\cdot f_y(y)$ (עם פונ' צפיפות משותפת $f_{x,y}$).

דוגמא - Y מ"מ רציף עם התפלגות אחידה בין 0 ל-1.

X מ"מ בדיד, $X\sim Bin(n,p)$. איך מתפלג x?

← X מ"מ בדיד.

← X נתמך ע"י הקבוצה $\{0,1,2\dots n\}$ $P(X=k)=\int_{y=0}^{1}P(X=k|Y=y)\cdot f_y(Y=y)\,dy$

$$=\int_{y=0}^{1}\binom{n}{k}y^k(1-y)^{n-k}\cdot 1\,dy=\dots=\frac{1}{n+1}$$

← x מתפלג אחיד על $\{0,1,\dots n\}$.

הסתברות הרצאה- 1-11|6

5.8. Transformation of R.V

טענה - אם $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונ' הפיכה (ומונוטונית) ו-$Y=h(X)$ כאשר X מ"מ רציף עם צפיפות $f_X(x)$, אז הצפיפות של Y:
$$f_Y(y)=f_Y(h(x))=f_X(x)\cdot\left(h^{-1}(x)\right)'$$
$$\left(g(f(x))\right)'=g'(f(x))\cdot f'(x)$$

הוכחה - (למקרה ש-h מונ' עולה) - $x=h^{-1}(y)$ $\quad y=h(x)$
$$\frac{dy}{dx}=h'(x)\qquad \frac{dx}{dy}=\left(h^{-1}(y)\right)'$$
$$P(Y\le a)=P(h(X)\le a)=P(X\le h^{-1}(a))=\int_{-\infty}^{h^{-1}(a)}f_X(x)\,dx=\int_{-\infty}^{a}f_X\left(h^{-1}(y)\right)\left(h^{-1}(y)\right)'dy$$

המקרה הדו מימדי -

תהא - $h(s,t)=(h_1(s,t),h_2(s,t))$, פונ' הפיכה (ומונוטונית) מתחום פתוח במישור לתחום פתוח אחר. (תחום פתוח במישור לכל נק' בתחום יש ε כך שהדיסק ברדיוס ε סביב הנק' מוכל בתחום).

-נניח שהנגזרות החלקיות קיימות ונגדיר- $Jh(s,t)=\det\begin{pmatrix}\frac{dh_1}{ds} & \frac{dh_1}{dt}\\ \frac{dh_2}{ds} & \frac{dh_2}{dt}\end{pmatrix}$

(זהו היעקוביאן)

אז אם נגדיר - $(U,V)=h(X,Y)$, הצפיפות המשותפת של U,V היא-
$$f_{U,V}(h(x,y))=f_{X,Y}(x,y)\cdot Jh(x,y)^{-1}$$

הערה- X,Y מ"מ ב"ת בעלי צפיפויות שוליות f_X,f_Y ונגדיר- $U=X+Y$, $V=Y$

מה הצפיפות המשותפת של U,V?
$$h(x,y)=(x+y,y)\qquad ,\ h^{-1}(u,v)=(u-v,v)$$
$$Jh(x,y)=\det\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}=1$$
$$f\qquad =f_{X,Y}\left(h^{-1}(u,v)\right)\cdot 1=f_{X,Y}(u-v,v)=f_X(u-v)\cdot f_Y(v)$$

מה ההתפלגות השולית של $X+Y$? $f_{X+Y}(u,v)=\int_{y=-\infty}^{\infty}f_X(u-v)f_Y(v)dv$.

האינטגרל הנ"ל (קרוא הקונבולוציה (Convolution) של X ו-Y.

תזכורת- איך מתפלג סכום של הנ"ל ב קוטית: $P(X+Y=k)=\sum_{j=1}^{k}P(X=j)\cdot P(Y=k-j)$

5.9. התפלגויות רציפות (Continuous Distribution).

← המקרים הפופולריים הם כאלו בהם ההתפלגויות רציפות ובעלות צפיפות.

5.9.1 Uniform Dist

הגדרה - אומרים ש-X מתפלג התפלגות אחידה בקטע $[a,b]$ ומסמנים ←

הסתברות הרצאה - שבוע 2

$X\sim U([a,b])$, $U[a,b]$ אם - $f_X(x)=\frac{1}{b-a}I[a,b]$

הערה - הסימון (והשם) נהוג במקרה הרציף.

תוחלת - $X\sim U[a,b]$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot f_X(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}x\cdot\frac{1}{b-a}I[a,b](x)dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b xdx=\frac{x^2}{2(b-a)}\Big|_a^b=$$

$$=\frac{b^2-a^2}{2(a-b)}=\frac{a+b}{2}$$

השונות היא - $\frac{(b-a)^2}{12}$ תרגיל.

טענה - אם F פונקציית התפלגות רציפה של מ"מ X נסמן במ"מ $F(X)$,

אז - $F(X)\sim U[0,1]$, $P(F(X)\le a)=P(X\le F^{-1}(a))=F(F^{-1}(a))=a$

בקטע $[0,1]$ פונ' התפלגות המחושבת היא x ונגזרתה 1 כלומר זו פונקציית הצפיפות של $U[0,1]$.

טענה - אם F פונ' התפלגות רציפה ו- $X\sim U[0,1]$ אז $F^{-1}(X)$ מתפלג F (הוכחה דומה)

ביחד, מתאפשרת למעבור מכל התפלגות רציפה לכל התפלגות רציפה.

5.9.2 התפלגות מעריכית (Exponential Dist)

הגדרה - אומרים שלמ"מ X יש התפלגות מעריכית עם פרמטר λ ומסמנים $X\sim Exp(\lambda)$

אם פונ' צפיפות ההסתברות של X, הוא $f_X(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

הערות - 1. לעיתים $X\sim Exp(\tau)$ מתכוונים - $f_X(x)=\frac{1}{\tau}e^{-\frac{x}{\tau}}$.

2. הנקרא "רצב", "קבוע קצב", "קבוע דעיכה"

$\tau\cdot\ln 2$ - נקרא "זמן מחצית חיים"

$$P(X>\tau\cdot\ln 2)=\int_{\tau\cdot\ln 2}^{\infty}\frac{1}{\tau}e^{-\frac{x}{\tau}}dx=-e^{-\frac{x}{\tau}}\Big|_{\tau\ln 2}^{x}=0-e^{-\frac{\tau\cdot\ln 2}{\tau}}=e^{-\ln 2}=$$

$$=\frac{1}{e^{\ln 2}}=\frac{1}{2}$$

הסתברות - הרצאה - 12/6-1

5.9.3 התפלגות נורמלית (Normal Dist)

הגדרה - נאמר ש-X מתפלג נורמלית (או גאוסיאנית) עם פרמטרים σ^2, μ

ונסמן $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ - אם $f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$.

הערה - אם $\mu=0$, $\sigma=1$ אז זהו מ"מ נורמלי סטנדרטי. כלומר $X\sim N(0,1)$ אם-

$$f_X(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$X\sim N(0,1)$

← f_X סימטרית ולכן $E(X)=0$.

← חשבו את $V(X)=1$

← אם $X\sim N(\mu,\sigma)$ ו- $Z=\frac{X-\mu}{\sigma}$ אז $Z\sim N(0,1)$

הוכחה - $f_X=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

$$\frac{dz}{dx}=\frac{1}{\sigma}$$

$$f_Z=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-\frac{z^2}{2}}\cdot\sigma=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}$$

← לכן אם $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ אז $E(X)=\mu$, $V(X)=\sigma^2$

← כלומר, התפלגות נורמלית נקבעת ע"י התוחלת והשונות.

← $\int_0^t e^{-x^2}dx$ אינו פונקציה אלמנטרית, לכן משתמשים בטבלה.

טענה - פונק' הצפיפות של מ"מ נורמלי סטנדרטי היא אכן פונק' צפיפות.

הוכחה - $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx=2\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx$

נחשב את- $\left(\int_0^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)\left(\int_0^{\infty}e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)$

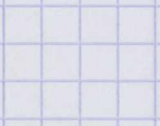
$$(\ )(\ )=\int_{x=0}^{\infty}\int_{y=0}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2}}\cdot e^{-\frac{y^2}{2}}dxdy$$

← קל לראות ש-

$$\left(\int_0^M f(x)dx\right)\left(\int_0^N g(y)dy\right)=\int_0^M\int_0^N f(x)g(y)dxdy$$

אם האינטגרלים מתכנסים בהחלט, נראה נכונות לאינטגרלים לא אמיתיים בסמסטר הבא.

נב - $\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}}dxdy$



נחליף משתנים $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\theta=atan(y/x)$, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$

$$J_h^{-1}=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r\cos^2\theta+r\sin^2\theta=r$$

הסתברות הרצאה - 2-12/6

$$\int_{\theta=0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2}} r\,dr\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} -e^{-\frac{r^2}{2}}\Big|_0^\infty d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 0--1\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\theta = \frac{\pi}{2}$$

$\Leftarrow$ $\int_0^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

$\Leftarrow$ $\int_{-\infty}^\infty e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sqrt{2\pi}$

טענה - אם $X_1\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $X_2\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$ ב"ת אז - $X_1+X_2\sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

6. משפטי גבול (limit theorems)

⇐ דגש בסדרות של מ"מ.

⇐ אם $X_1,X_2,X_3...$ סדרת מ"מ אז נסמן - $\bar X_n = \frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}$

הגדרה - נאמר שסדרה מ"מ Y_n מתכנסת בהסתברות לקבוע μ ונסמן: $Y_n \xrightarrow{P} \mu$

אם לכל $\varepsilon>0$, $\lim_{n\to\infty}(P(|Y_n-\mu|<\varepsilon))=1$

⇐ נאמר שסדרת מ"מ Y_n מתכנסת כמעט תמיד או כמעט בוודאות לקבוע μ,

ונסמן: $Y_n\xrightarrow{a.s}\mu$ אם - $P(\lim_{n\to\infty}(Y_n=\mu))=1$.

$\Leftarrow$ $\lim Y_n=\mu$

$\Updownarrow$

$\forall\varepsilon \exists N \forall n>N |Y_n-\mu|<\varepsilon$

$|Y_n-\mu|<\varepsilon$

$Y_n\in(\mu-\varepsilon,\mu+\varepsilon)$

$\bigcap_{d=1}^\infty\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\{Y_n:|Y_n-\mu|<\frac1d\}$

⇐ כיצד זה מוגדר - $P(\lim_{n\to\infty}(Y_n=\mu))$.

טענה - אם $Y_n\xrightarrow{a.s}0$ אז $Y_n\xrightarrow{P}0$.

הוכחה - $(\varepsilon>0)$ $1=P(\lim_{n\to\infty}(Y_n=0))=$

$=P(\forall\delta>0\exists N\forall n\ge N|Y_n|<\delta)=$

$=P(\bigcap_{d=1}^\infty\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\{|Y_n|<\frac1d\})\le$

$\le P(\bigcup_{N=1}^\infty\bigcap_{n=N}^\infty\{|Y_n|<\varepsilon\})=\lim_{N\to\infty}P(\bigcap_{n=N}^\infty\{|Y_n|<\varepsilon\})$

$\le\lim_{n\to\infty}P(|Y_n|<\varepsilon)$

דוגמא - נגדיר $Y_n=b(\frac1n)$ סדרת מ"מ ב"ת

⇐ נתון $\varepsilon>0$, $P(Y_n<\varepsilon)=1-\frac1n$

$\lim P(Y_n<\varepsilon)=\lim 1-\frac1n=1$

⇐ נראה ש- $\lim Y_n=0$ צריך שיהיה N כך שלכל $n>N$, $Y_n=0$.

הסתברות הרצאה - 3-12/6

עבור N נתון הסיכוי הוא: $\prod_{n=N}^{\infty}(1-\frac{1}{n})=0$

ובפרט הסיכוי שיש N כ"ל הוא 0.

$(1-\frac{1}{2n})^n < c < 1$

← התכנסות בהסתברות חלשה ממש מהתכנסות כמעט בוודאות.

הגדרה - נאמר שסדרת מ"מ Y_n מתכנסת בהתפלגות למ"מ Y ונסמן $Y_n \xrightarrow{D} Y$ אם לכל $a\in\mathbb{R}$: $\lim_{n\to\infty} P(Y_n \le a) = P(Y \le a)$

משפט - (החוק החלש של המספרים הגדולים) - יהיו $X_1, X_2, \dots$ סדרת מ"מ בלתי מתואמים כולם בעלי תוחלת μ ושונות σ^2, אז $\bar{X}_n \xrightarrow{P} \mu$.

משפט - (החוק החזק...) - תהאו $X_1, \dots$ סדרת מ"מ ב"ת בעלי אותה תוחלת μ ואותה שונות σ^2, אז $\bar{X}_n \xrightarrow{a.s} \mu$

הערה - בשני המשפטים מספיק להניח שונות חסומה.

משפט - (משפט הגבול המרכזי) - יהיו $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת שווי התפלגות עם תוחלת μ ושונות σ^2 $\frac{\bar{X}_n-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$

1-18/6 - הרצאה - הסתברות

7. סטטיסטיקה (Statistics)

7.1 Descriptive Statistics

סוגי משתנים -

1. משתנה איכותי - (מוצא, צבע עיניים).
2. משתנה אורדינלי - יש חשיבות לסדר.
3. משתנה אינטרוולי - יש חשיבות להפרש.
4. משתנה מנתי - יש חשיבות ליחס.

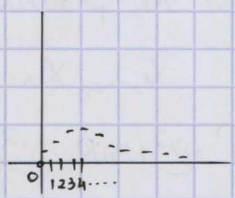
← תת חלוקה נפוצה (במקרים 3,4) היא רציף/בדיד.

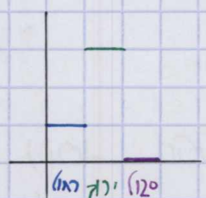
אוכלוסיה מול מדגם

← שאלת הלידה בסטטיסטיקה: איך להסיק ממדגם על אוכלוסייה.

← איך מתארים? * תיאור גרפי.

* היסטוגרמה (לכמה אובייקטים יש תכונה מסוימת).





* דיאגרמת עוגה (מציגה יחס באוכלוסייה).
* דיאגרמת פיזור (x-y diagram).

← מדדי מרכז

דוגמאות - 1. ממוצע $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\dots+x_n}{n}$

2. חציון - ממיינים את הערכים ובוחרים באמצע (או כל מס' בין שני האמצעיים אם n זוגי).

3. אמצע הטווח - $\frac{\min x_i+\max x_i}{2}$

4. שכיח - הערך הכי נפוץ

תכונות - 1. סימטריה - לא מושפעים מתמורה על הנתונים.

לכל $\sigma\in S_n$ $\quad f(x_1,\dots,x_n)=f(x_{\sigma_1},\dots x_{\sigma_n})$

2. הומוגניות - $f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)=\lambda f(x_1,\dots,x_n)$

3. שקיפות להזזה - $f(x_1+a,\dots,x_n+a)=f(x_1,\dots,x_n)+a$

הסתברות הרצאה 18/6 - 2

4. עקביות - $f_{n+1}(x_1,\dots,x_n,f_n(x_1,\dots,x_n)) = f_n(x_1,\dots,x_n)$

← מדדי פיזור -

1. סימטריה
2. הומוגניות חיובית - $f(\lambda x_1,\dots,\lambda x_n)=|\lambda| f(x_1,\dots,x_n)$
3. אדישות להזזה - $f(x_1+a,\dots,x_n+a)=f(x_1,\dots,x_n)$

דוגמאות - 1. סטיית תקן

2. טווח - max-min

3. טווח בין רבעוני $Q_{75}-Q_{25}$

7.2 תורת האמידה (Estimation Theory)

← יש התפלגות פרמטרית F_θ.

← רוצים להעריך את θ.

← דוגמאות - $x_1,\dots,x_n$

הערה - פונקציה מהמדגם לערך יחיד נקראת סטטיסטי אם הפונקציה לא תלויה בפרמטר, אך בהקשר של אמידה היא נקראת אומד נקודתי. הערך המתקבל נקרא אומדן.

← מסמנים ב- $f(x_1,\dots,x_n)$.

← מעוניינים בהתפלגות של $f(x_1,\dots,x_n)$

הגדרה - f נקראת אומד חסר הטיה ל-θ אם לכל θ התוחלת של המדגם של $f(x_1,\dots,x_n)$ היא θ.

(אומד חסר הטיה ל-$r(\theta)$ גם מוגדר).

דוגמאות - 1. הממוצע הוא אומד חסר הטיה לתוחלת עבור כל התפלגות.

2. בהתפלגות נורמלית, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum(x_n-\bar{x})^2$, הוא אומד חסר הטיה לשונות.

<u>אומד נראות מקסימלית</u>

← בהינתן התפלגות - F_θ, ותצפיות $x_1..x_n$ בד"כ קל לחשב את - $P(x_1..x_n|\theta)$ (ב"ת) $=\prod_{i=1}^{n}P(x_i|\theta)$
לסיכוי הזה קוראים הנראות של התצפיות (likelihood).

7.3 הסקה סטטיסטית (Inferential Statistics)

← פרוצדורה להכרעה בשאלות לגבי התפלגויות של משתנים.