פתרון מבחן דמה – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 18/02/18

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד. משקל כל שאלה 20 נק', ענו על כל השאלות. כל ציון מעל 100 יעוגל ל100.

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{\left(x^2\right)}-1\right)\sin(2x)}{\left(1-\cos(x)\right)\ln(1+2x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{(x^2)}-1}{x^2}\cdot\frac{\sin(2x)}{2x}\cdot\frac{x^2}{1-\cos(x)}\cdot\frac{2x}{\ln(1+2x)}=2$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}2x\arctan\left(x\right)-\pi x$$

$$\lim_{x\to\infty}x(2\arctan(x)-\pi)=\{\infty\cdot 0\}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\arctan(x)-\pi}{\frac{1}{x}}=\left\{\frac{0}{0},L'Hopital\right\}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{-2}{1+\frac{1}{x^2}}=-2$$

ג. $$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{\left(n!\right)^2}{\left(2n\right)!}}$$

נסמן

$$a_n=\frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

לפי מבחן המנה אם גבול המנה קיים אזי

$$\lim\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\lim\sqrt[n]{a_n}=\lim\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

(אין צורך בערך המוחלט כי הסדרה חיובית)

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\left((n+1)!\right)^2}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\left(\frac{(n+1)!}{n!}\right)^2\cdot\frac{(2n)!}{(2n)!\,(2n+1)(2n+2)}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+2)}=\frac{n^2}{n^2}\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{2}{n}\right)}\to\frac{1}{4}$$

סה"כ

$$\lim\sqrt[n]{\frac{(n!)^2}{(2n)!}}=\frac{1}{4}$$

.2

א. חשבו את $\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}dx$.

$$\int \frac{\cos(x)}{\sin(x)+1+\cos^2(x)}dx = \begin{Bmatrix} t=\sin(x) \\ dt=\cos(x)\,dx \end{Bmatrix} = \int \frac{1}{t+1+1-t^2}dt = \int \frac{-1}{t^2-t-2}dt =$$

נשים כי המכנה פריק

$$t_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = 2,-1$$

ולכן

$$t^2-t-2 = (t-2)(t+1)$$

נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{-1}{t^2-t-2} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t+1}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$-1 = A(t+1) + B(t-2)$$

נציב $t=-1,2$

$$-1 = -3B$$

$$-1 = 3A$$

$$\frac{-1}{t^2-t-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-2}\right)$$

נחזור לאינטגרל

$$= \int \frac{-1}{t^2-t-2}dt = \frac{1}{3}\ln|t+1| - \frac{1}{3}\ln|t-2| + C = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{1+\sin(x)}{\sin(x)-2}\right| + C$$

ב. קבעו האם האינטגרל הבא מתכנס $\int_1^\infty \frac{\arctan(x)}{x^2-x+1}dx$.

מדובר באינטגרל חיובי, נמצא לו חבר, ננחש $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$

נחשב את הגבול

$$\frac{\arctan(x)}{x^2-x+1} \cdot \frac{x^2}{1} = \arctan(x) \cdot \frac{x^2}{x^2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} \to \frac{\pi}{2}$$

לכן הם חברים, וגם האינטגרל בשאלה מתכנס.

3.

א. מצאו את הערך המינימלי של הפונקציה $e^{2x}-x$.

$$h(x)=e^{2x}-x$$

$$h'(x)=2e^{2x}-1$$

נבדוק מתי h' מתאפסת

$$h'(x)=0$$

$$2e^{2x}=1$$

$$e^{2x}=\frac{1}{2}$$

$$2x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln(2)$$

$$x=-\frac{\ln(2)}{2}$$

כלומר גילינו כי $h'\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right)=0$

כיוון ש h' עולה (כי $h''=4e^{2x}>0$), נובע שלכל $x>-\frac{\ln(2)}{2}$ מתקיים כי $h'(x)>0$

ולכל $x<-\frac{\ln(2)}{2}$ מתקיים כי $h'(x)<0$

ולכן h יורדת עד $x=-\frac{\ln(2)}{2}$, ועולה אחריו, ולכן לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים כי

$$h(x)\geq h\left(-\frac{\ln(2)}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\ln(2)}{2}=\frac{1+\ln(2)}{2}$$

כלומר הערך המינימלי של הפונקציה הוא $\frac{1+\ln(2)}{2}$.

ב. מצאו כמה פתרונות יש למשוואה $e^{x}=\sqrt{x}$.

אם יש פתרון למשוואה זו, כלומר

$$e^{x}=\sqrt{x}$$

אז נעלה בריבוע ונקבל כי הפתרון מקיים גם

$$e^{2x}=x$$

כלומר

$$e^{2x}-x=0$$

שימו לב, לא כל פתרון למשוואה זו הוא פתרון לשאלה, אבל כל פתרון למשוואה בשאלה חייב לקיים משוואה זו.

אבל! בסעיף א' הוכחנו כי בכל הממשיים

$$e^{2x}-x\geq\frac{1+\ln(2)}{2}>0$$

לכן אין פתרונות למשוואה $e^{2x}-x=0$ ולכן אין פתרונות למשוואה המקורית.

4. תהי פונקציה f הגזירה בכל הממשיים, ומקיימת כי $f'(x) < x$ לכל $x \in \mathbb{R}$ וכמו כן $f(0) = 0$.

א. הוכיחו כי לכל $x > 0$ מתקיים כי $f(x) < \frac{x^2}{2}$.

נעביר אגף ונבנה פונקציה

$$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}$$

אנחנו צריכים להוכיח כי לכל $x > 0$

$$h(x) = f(x) - \frac{x^2}{2} < 0$$

נחקור

$$h'(x) = f'(x) - x < 0$$

ולכן h יורדת תמיד.

כמו כן

$$h(0) = f(0) - \frac{0^2}{2} = 0$$

לכן לכל $x > 0$ מתקיים כי

$$h(x) < h(0) = 0$$

בדיוק כפי שרצינו להוכיח

ב. חשבו את $\lim_{x\to(-\infty)} f(x)$.

בסעיף קודם הוכחנו שh תמיד יורדת, וכי $h(0) = 0$, וכעת אנחנו רוצים להסיק משהו על המספרים השליליים כי שם בקשו את הגבול.

לכל $x < 0$ כיוון שh יורדת מתקיים כי

$$h(x) > h(0) = 0$$

כלומר

$$f(x) - \frac{x^2}{2} > 0$$

ולכן

$$f(x) > \frac{x^2}{2}$$

ולפי חצי סנדוויץ' כיוון ש $\lim_{x\to(-\infty)} \frac{x^2}{2} = \infty$ גם $\lim_{x\to(-\infty)} f(x) = \infty$

5. נביט בסדרה המוגדרת על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1}=2a_n+\frac{1}{n}$, ותנאי ההתחלה $0<a_1$.

א. הוכיחו כי a_n מונוטונית עולה.

$$a_{n+1}-a_n=a_n+\frac{1}{n}>0$$

כאשר נוכיח שלכל n מתקיים כי $a_n>0$

בדיקה -נתון כי $a_1>0$

בהנתן n עבורו $a_n>0$ מתקיים כי

$$a_{n+1}=2a_n+\frac{1}{n}>0$$

משל אינדוקציה.

ב. חשבו את $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

כיוון שהסדרה עולה **אם** היא חסומה היא מתכנסת לגבול סופי $a_n\to L$

במקרה כזה, נשאיף את שני צידי נוסחאת הנסיגה

$$\lim a_{n+1}=\lim 2a_n+\frac{1}{n}$$

$$L=2L$$

לכן $L=0$

אבל כיוון שהסדרה עולה כל איבריה וגם הגבול גדולים או שווים לאיבר הראשון ולכן

$$0=L\geq a_1>0$$

סתירה

לכן הסדרה <u>אינה חסומה</u> וכיוון שהיא עולה היא שואפת לאינסוף $a_n\to\infty$

6.

א. חשבו את גבול הסדרה $a_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\sin\left(\frac{k}{n}\right)-\sin\left(\frac{k-1}{n}\right)\right)$

פתרון עם טריק

$$a_n=\sin\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{0}{n}\right)+\sin\left(\frac{2}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{3}{n}\right)-\sin\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+\sin(1)-\sin\left(\frac{n-1}{n}\right)=\sin(1)$$

כלומר מדובר בסדרה הקבועה $\sin(1)$ השואפת ל$\sin(1)$

פתרון עם סכומי רימן:

$$\sin\left(\frac{k-1}{n}\right)=\sin\left(\frac{k}{n}-\frac{1}{n}\right)=\sin\left(\frac{k}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)-\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}n\cdot\frac{1}{n}\left(\sin\left(\frac{k}{n}\right)-\sin\left(\frac{k}{n}\right)\cos\left(\frac{1}{n}\right)+\sin\left(\frac{1}{n}\right)\cos\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

נביט בשני סכומים

$$n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\sin\left(\frac{n}{k}\right)\to 0\cdot\int_0^1\sin(x)\,dx=0$$

$$n\left(1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)=\frac{1-\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}\to 0$$

$$n\sin\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cos\left(\frac{k}{n}\right)\to 1\cdot\int_0^1\cos(x)\,dx=\sin(1)$$

סה"כ

$$a_n\to\sin(1)$$

ב. קרבו את $\int_0^1\sin(x^2)dx$ באמצעות פולינום טיילור מדרגה 3 של הפונקציה $f(x)=\int_0^x\sin(t^2)dt$.

הנקודה המצוייה היא $a=0$ נותר רק לחשב נגזרות

לפי המשפט היסודי של החדו"א, הנגזרת של פונקצית השטח של פונקציה רציפה היא הפונקציה עצמה

$$\left(\int_0^x\sin(t^2)\,dt\right)'=\sin(x^2)$$

דרך נוספת להסתכל על זה היא בעזרת נוסחאת ניוטון-לייבניץ

נסמן בF את הקדומה של $\sin(x^2)$

$$\left(\int_0^x\sin(t^2)\,dt\right)'=\left(F(x)-F(0)\right)'=F'(x)=\sin(x^2)$$

מסקנה עבור פונקציה רציפות וגזירות וסבבה:

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)}f(t)dt\right)'=\Big(F\big(h(x)\big)-F\big(g(x)\big)\Big)'=f\big(h(x)\big)h'(x)-f\big(g(x)\big)g'(x)$$

נחזור לתרגיל שעכשיו אין בו אתגר כלל

$$f(x)=\int_0^x\sin(t^2)\,dt$$

$$f'(x)=\sin(x^2)$$

$$f''(x)=2x\cos(x^2)$$

$$f'''(x)=2\cos(x^2)-4x^3\sin(x^2)$$

ולכן פולינום הטיילור הוא

$$P_3(f,0)(x)=\frac{2}{3!}x^3=\frac{1}{3}x^3$$

כעת אנחנו מחפשים את

$$f(1) = \int_0^1 \sin(t^2)\, dt = \int_0^1 \sin(x^2)\, dx$$

$$f(1) \approx P_3(1) = \frac{1}{3}$$