08.02.18

88-112 אלגברה לינארית 1 – מועד א' - פתרון

מרצה: ארז שיינר

מתרגלת: עדי בן-צבי

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
4	
5	
סה"כ	

חלק א'

1. (30 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית, תהיינה $T,S:V\to V$ העתקות לינאריות (אופרטורים), נסמן את העתקת הזהות ב $I:V\to V$.

א. הוכיחו/הפריכו: אם $T^2=T+I$ אזי T הפיכה.

<u>הוכחה:</u>

<u>דרך I:</u>

$T^2-T=I$ ולכן $T^2-T=T(T-I)=(T-I)T=I$ ולכן לפי ההגדרה T הפיכה ו $T^{-1}=T-I$.

שימו לב: זה קריטי שהראנו את ההרכבה משני הצדדים, אם $f\circ g=I$ זה לא גורר בהכרח שאחת הפונקציות הפיכות.

<u>דרך II:</u>

המטריצה המייצגת את ההעתקה לפי בסיס כלשהו $[T]_B^B$ היא ריבועית, כיוון שגודל המטריצה תלוי במימדים של המרחבים ובמקרה זה הם שווים כי זה אותו מרחב.

לכן $[T(T-I)]_B^B=[I]_B^B$. העתקת הזהות הפיכה, ולכן $[I]_B^B$ הפיכה.

(למעשה $[I]_B^B$ היא מטריצת היחידה, אבל זה לא משנה כרגע)

$[T(T-I)]_B^B=[T]_B^B[T-I]_B^B$ ומכפלת מטריצות <u>ריבועיות</u> הפיכה, אם"ם כל אחת מהן הפיכה.

לכן $[T]_B^B$ הפיכה ולכן גם T הפיכה.

ב. הוכיחו/הפריכו: אם $T\circ S=I$ אזי T הפיכה.

<u>הוכחה:</u>

<u>דרך I:</u>

$[T\circ S]_B^B=[T]_B^B[S]_B^B=[I]_B^B$ ולכן T הפיכה לפי אותה ההוכחה שנכתבה בסעיף א' בדרך השנייה.

<u>דרך II:</u>

$T\circ S$ שווה לזהות ולכן הפיכה, ולכן על.

לפי בדידה, נובע כי T על.

כיוון ש T העתקה בין מרחבים ממימדים זהים (אותו המרחב), היא על אם"ם היא חח"ע אם"ם היא הפיכה.

לכן T הפיכה.

ג. הוכיחו/הפריכו: אם $\ker(T)=\ker(S)$ אזי $\ker\left(T+S\right)\subseteq\ker(T)$.

<u>הפרכה</u>:

נבחר V כלשהו ממימד $n\neq 0$ (במילים פשוטות – כל מרחב שאינו מרחב האפס).

נבחר $T=I$ ו $S=-I$. כעת $\ker(T)=\ker(I)=\left\{0_V\right\},\ker(S)=\ker(-I)=\left\{0_V\right\}$, אך

$\ker(T+S)=\ker(I-I)=\ker(0)=V$.

וכמובן ש $V\not\subseteq\left\{0_V\right\}$.

<u>הערה</u>: הטעות הנפוצה ביותר בתרגיל זה הייתה הבלבול בין שני תתי המרחבים <u>השונים</u> $\ker(T+S)$ (הגרעין של סכום ההעתקות) ו $\ker(T)+\ker(S)$ (סכום הגרעינים של ההעתקות).

ד. הוכיחו/הפריכו: אם $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(S)$ אזי $\mathrm{Im}\left(T+S\right)\subseteq\mathrm{Im}(T)$.

<u>הוכחה</u>:

יהי $u\in\mathrm{Im}\left(T+S\right)$ אזי קיים $v\in V$ עבורו $u=\left(T+S\right)v$.

לכן $u=Tv+Sv$.

ברור כי $Sv\in\mathrm{Im}(S)$ ולכן לפי הנתון $Sv\in\mathrm{Im}(T)$.

לכן לפי סגירות של מרחב התמונה נובע כי $u=Tv+Sv\in\mathrm{Im}(T)$ כפי שרצינו.

<u>הערה</u>: טעות נפוצה כאן הייתה לחשוב שכיוון ש $\mathrm{Im}(T)=\mathrm{Im}(S)$ (קבוצת האיברים בתמונה זהים) אזי גם $Tv=Sv$ (כל איבר ספציפי נשלח לאותו המקום על ידי שתי ההעתקות). כמובן שהתמונות יכולות להיות זהות, אך ההעתקות שונות.

2. (10 נק') תהיינה $A,B\in\mathbb{R}^{m\times n}$ ותהי $P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ הפיכה כך ש $B=AP$.

הוכיחו/הפריכו: $C(A)=C(B)$.

<u>הוכחה</u>:

<u>דרך I</u>:

כפל במטריצה הפיכה אינו משנה את הדרגה, ולכן $rank(B)=rank(AP)=rank(A)$.

לכן $\dim C(B)=\dim C(A)$.

מצד שני, ידוע (לפי כפל עמודה) כי $C(B)=C(AP)\subseteq\mathrm{C(A)}$.

ביחד לפי שיוויון מימדים והכלה חד כיוונית נובע כי $C(A)=C(B)$.

<u>דרך II</u>:

נשחלף את שני צידי המשוואה $B^t=P^tA^t$. ידוע כי כפל משמאל במטריצה הפיכה לא משנה את מרחב השורות $R\left(B^t\right)=R\left(A^t\right)$ ולכן $C(A)=C(B)$.

חלק ב'

3. (30 נק') יהיו

$$v_1 = a+2x-2x^2 \qquad w_1 = (a,2,0)$$
$$v_2 = x-x^2 \qquad w_2 = (a,1+a,0)$$
$$v_3 = 1+x \qquad w_3 = (1,-1,a)$$

א. לאילו ערכי a קיימת העתקה לינארית $T:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}^3$ המקיימת $\forall i: Tv_i = w_i$?

פתרון:

ראשית, נבדוק מתי v_1,v_2,v_3 הם בת"ל. נשים את המקדמים שלהם בעמודות ונראה מתי יש משתנה חופשי:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 1 & 1 & 2\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_2-R_1} \begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 2-a\\ 0 & -1 & -2\end{pmatrix} \xrightarrow{R_3+R_2} \begin{pmatrix}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & 2-a\\ 0 & 0 & -a\end{pmatrix}$$

<u>שימו לב</u> – בחרנו בסדר עמודות שהקל על הדירוג.

לכן אם $a\neq 0$ הוקטורים v_1,v_2,v_3 הם בת"ל, ולפי השלישי חינם מהווים בסיס למרחב $\mathbb{R}_2[x]$ שהוא ממימד 3.

כעת, אם $a=0$ אנו מקבלים כי $v_1=2v_2$ וכמו כן $w_1=2w_2$ לכן אם T העתקה לינארית המקיימת $Tv_2=w_2$ בוודאי $Tv_1 = T(2v_2) = 2Tv_2 = 2w_2 = w_1$.

לכן כל העתקה שמקיימת $\begin{matrix}Tv_2 = w_2\\ Tv_3 = w_3\end{matrix}$ תקיים $\forall i: Tv_i = w_i$.

ניתן להשלים את v_2,v_3 לבסיס על ידי v_4 כלשהו.

כעת **<u>לכל בחירה</u>** של w_4 תהיה העתקה לינארית המקיימת $\begin{matrix}Tv_2 = w_2\\ Tv_3 = w_3\\ Tv_4 = w_4\end{matrix}$ לפי משפט ההגדרה.

<u>תשובה סופית</u>: לכל a קיימת העתקה כזו.

ב. לכל ערך של a מסעיף א', מצאו את $\dim\left(\operatorname{Im}(T)\right), \dim\left(\ker(T)\right)$.

<u>פתרון</u>:

ראשית, אם $a \neq 0$, אזי v_1, v_2, v_3 הוא בסיס ולכן $\operatorname{Im}(T) = sp\left\{Tv_1, Tv_2, Tv_3\right\}$.

כלומר $\operatorname{Im}(T) = sp\left\{(a,2,0),(a,1+a,0),(1,-1,a)\right\}$, נשים בעמודות ונדרג על מנת למצוא מי מיותר.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a \\ -1 & 1+a & 2 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2+R_1} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+2a & 2+a \\ 0 & a^2 & a^2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{a^2}R_3,(a\neq 0)} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1+2a & 2+a \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2-(1+2a)R_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 0 & 2+a-(1+2a) \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & a & a \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{pmatrix}$$

לכן אם בנוסף לכך ש $a \neq 0$ גם $a \neq 1$ שלושת הוקטורים בת"ל ולכן $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$.

לפי משפט הדרגה $\dim \operatorname{Im}(T) + \dim \ker(T) = \dim \mathbb{R}_2[x] = 3$, ולכן סה"כ $\dim \ker(T) = 0$.

עבור $a = 1$ קיבלנו שיש וקטור אחד מיותר ושניים בת"ל ולכן $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$, ולכן $\dim \ker(T) = 1$.

עבור $a = 0$ ידוע שישנן אינסוף העתקות כאלה, ושהמשוואה הראשונה מיותרת.

נובע ש $\operatorname{Im}(T) = \left\{w_2, w_3, w_4\right\}$ כאשר w_4 לבחירתנו, כפי שהסברנו בסעיף א'.

לכן $sp\left\{(0,1,0),(1,-1,0)\right\} \subseteq \operatorname{Im}(T)$ וכיוון שהם לא פרופורציונליים הם בת"ל, ונובע ש $\dim \operatorname{Im}(T) \geq 2$. ניתן לבחור את w_4 שישלים אותם לבסיס או יהיה תלוי בהם, ולכן $\dim \operatorname{Im}(T) = 2$ או $\dim \operatorname{Im}(T) = 3$ ובהתאם $\dim \ker(T) = 1$ או $\dim \ker(T) = 0$.

ג. עבור $a=1$ מצאו בסיס ל $\ker(T)$, עבור ההעתקה מסעיף א'.

<u>פתרון</u>:

<u>דרך I</u>:

נציב $a=1$ ונשים לב כי

$$T\left(1+2x-2x^2\right)=(1,2,0)$$
$$T\left(x-x^2\right)=(1,2,0)$$
$$T\left(1+x\right)=(1,-1,1)$$

לכן מיידי לראות כי $T\left(1+2x-2x^2-(x-x^2)\right)=\left(0,0,0\right)$

ולכן $1+x-x^2\in\ker(T)$.

כיוון ש $\dim\operatorname{Im}(T)=2$ נובע כי $\dim\ker(T)=1$ ולכן $\ker(T)=sp\left\{1+x-x^2\right\}$

<u>דרך II</u>:

אני לא נוהג להשתמש בדרך שאציג כעת, אך הרבה מכם ניסו לפתור בשיטה זו וטעו, אז אתן את הפתרון הבא:

יהי $v\in\ker(T)$, לכן $Tv=0$. נציג את v כצירוף לינארי של הבסיס v_1,v_2,v_3:

$$v=\alpha\left(1+2x-2x^2\right)+\beta\left(x-x^2\right)+\gamma\left(1+x\right)$$

נפעיל את ההעתקה על שני הצדדים ונקבל כי:

$$0=\alpha\left(1,2,0\right)+\beta(1,2,0)+\gamma(1,-1,1)$$

נפתור את מערכת המשוואות המתאימה:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2-2R_1}\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&-3\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[R_1-R_2]{\substack{R_2\leftrightarrow R_3\\R_3+3R_2}}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

ולכן $\gamma=0$ וכמו כן $\alpha=-\beta$.

כעת הרוב טעו לרשום שהגרעין הוא $sp\left\{(1,-1,0)\right\}$ אך אלה רק מקדמים.

הוקטור בגרעין הוא

$$v=\alpha\left(1+2x-2x^2\right)-\alpha\left(x-x^2\right)+0\cdot\left(1+x\right)=\alpha\left(1+x-x^2\right)$$

ושוב קיבלנו כי $\ker(T)=sp\left\{1+x-x^2\right\}$.

<u>דרך III</u>:

חלק מכם מצאו את ההעתקה מפורשות וכך מצאו את הגרעין. זה כמובן חוקי, אבל ארוך מאד ומיותר בהתחשב בשאלה <u>הספציפית</u> הזו. אפתור בשיטה זו בכל מקרה.

נמצא את המקדמים של פולינום כללי:

$$a+bx+cx^2=\alpha\left(1+2x-2x^2\right)+\beta\left(x-x^2\right)+\gamma\left(1+x\right)$$

נפתור את מערכת המשוואות:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 2 & 1 & 1 & b \\ -2 & -1 & 0 & c \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+2R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-2a \\ 0 & -1 & 2 & c+2a \end{array}\right) \xrightarrow{R_3+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & -1 & b-2a \\ 0 & 0 & 1 & b+c \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\xrightarrow[R_2+R_3]{R_1-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & a-b-c \\ 0 & 1 & 0 & -2a+2b+c \\ 0 & 0 & 1 & b+c \end{array}\right)$$

ולכן

$$a+bx+cx^2=(a-b-c)\left(1+2x-2x^2\right)+(-2a+2b+c)\left(x-x^2\right)+(b+c)\left(1+x\right)$$

נפעיל את ההעתקה על שני הצדדים ונקבל

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=(a-b-c)\left(1,2,0\right)+(-2a+2b+c)\left(1,2,0\right)+(b+c)\left(1,-1,1\right)$$

ולכן

$$T\left(a+bx+cx^2\right)=(-a+b)\left(1,2,0\right)+(b+c)\left(1,-1,1\right)=(-a+2b+c,-2a+b-c,b+c)$$

כעת על מנת למצוא את הגרעין נשווה את הנוסחא המפורשת לאפס ונקבל את מערכת המשוואות

$$-a+2b+c=0$$
$$-2a+b-c=0$$
$$b+c=0$$

נפתור אותה

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-R_1]{R_2-2R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_2\leftrightarrow R_3]{R_2+3R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1+2R_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי הוא $(a,b,c)=\left(-t,-t,t\right)$, נחזור לצורה פולינומית ונקבל כי

$$\ker(T)=sp\left\{-1-x+x^2\right\}$$

ד. לאילו ערכי a ההעתקה מסעיף א' הפיכה?

<u>פתרון</u>:

כיוון שההעתקה בין מרחבים מאותו מימד, היא הפיכה אם"ם היא על אם"ם היא חח"ע.

כלומר ענינו על השאלה הזו בסעיף ב':

כאשר $a \neq 0,1$ קיבלנו ש $\dim\ker(T) = 0$ ולכן ההעתקה חח"ע, ולכן הפיכה.

עבור $a = 0$ ראינו שייתכן ש $\dim\ker(T) = 0$ לחלק מההעתקות, והן תהיינה הפיכות.

ה. לאילו ערכי a קיימת יותר מהעתקה לינארית יחידה המקיימת את תנאי סעיף א'? מצאו שתי העתקות שונות עם אותו ערך של a.

<u>פתרון</u>:

כאמור עבור $a = 0$ ישנן אינסוף העתקות כאלה.

נשלים את $1+x, x-x^2$ לבסיס על ידי וקטור כלשהו (למשל $v_4 = x^2$).

לכן ישנה העתקה אחת שתשלח את v_4 ל $w_4 = (0,0,0)$ וישנה העתקה <u>אחרת</u> שתשלח את $w_4 = (1,0,0)$.

פרטנו את כל ההוכחות הדרושות כאן כבר בסעיף א'.

4. (20 נק') תהי העתקה לינארית $T(x,y,z) = (x, x+y, x+y+z)$,

תהי המטריצה הממשית $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, יהי B בסיס ל $\mathbb{R}^3$, ונסמן ב S את הבסיס הסטנדרטי ל $\mathbb{R}^3$.

א. מצאו את $[T]_S^S$.

נפעיל את ההעתקה על איברי הבסיס הסטנדרטי

$T(1,0,0) = (1,1,1)$

$T(0,1,0) = (0,1,1)$

$T(0,0,1) = (0,0,1)$

הקואורדינטות של התוצאות לפי הבסיס הסטנדרטי לא משתנות, נשים אותן בעמודות:

$$[T]_S^S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. נתון כי $A=[T]_B^S$, מצאו את $[I]_S^B$.

פתרון:

נביט בנוסחא $[T]_S^S=[I]_S^B[T]_B^S$

ולכן $[T]_S^S\left([T]_B^S\right)^{-1}=[I]_S^B$

שימו לב: רובכם רשמת כי $\left([T]_B^S\right)^{-1}=[T]_S^B$ אבל זה לא נכון.

הנוסחא הנכונה היא $\left([T]_B^S\right)^{-1}=[T^{-1}]_S^B$.

כעת

$$[I]_S^B=[T]_S^S\left([T]_B^S\right)^{-1}=[T]_S^S A^{-1}$$

נהפוך את המטריצה A:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3-R_1]{R_2-2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1+R_2 \\ -R_2 \\ R_3+R_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

לכן

$$[I]_S^B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ג. מצאו את איברי הבסיס B.

פתרון:

עמודות מטריצת המעבר $[I]_S^B$ הן הקואורדינטות של איברי הבסיס B לפי הבסיס הסטנדרטי

ולכן מיידי כי $B=\{(-1,1,2),(1,0,-1),(0,0,1)\}$.

5. (20 נק') תהיינה שתי תתי קבוצות $U,W\subseteq\mathbb{R}^4$

$.W=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a^2-2ab+b^2=0\right\}$, $U=\left\{(a,a+b,a-b,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}$

א. (5 נק') הוכיחו כי U,W תתי מרחב של $\mathbb{R}^4$.

<u>פתרון:</u>

$$U=\left\{(a,a+b,a-b,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}=\left\{a(1,1,1,0)+b(0,1,-1,0)\mid a,b\in\mathbb{R}\right\}=$$

$$=sp\left\{(1,1,1,0),(0,1,-1,0)\right\}$$

כעת $span$ של קבוצה הוא תמיד תת מרחב.

עבור תת המרחב השני:

$$W=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a^2-2ab+b^2=0\right\}=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid (a-b)^2=0\right\}=$$

$$=\left\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4 \mid a-b=0\right\}$$

כעת אוסף פתרונות של מערכת משוואות הומוגנית הוא תמיד תת מרחב.

ב. (15 נק') מצאו בסיס ומימד ל $U,W,U\cap W$.

<u>פתרון:</u>

כיוון שהוקטורים הפורשים $U=sp\left\{(1,1,1,0),(0,1,-1,0)\right\}$ אינם פרופורציונליים הם בת"ל,

ולכן מדובר בבסיס ל U והמימד של U הוא 2.

נמצא בסיס ל W על ידי שנפתור את מערכת המשוואות ההומוגנית $a-b=0$:

$$\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

יש לנו שלושה משתנים חופשיים, נסמן $b=t,c=r,d=s$ והפתרון הכללי הינו:

$$(t,t,r,s)=t(1,1,0,0)+r(0,0,1,0)+s(0,0,0,1)$$

ולכן הבסיס ל W הינו $\left\{(1,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)\right\}$, והמימד של U הוא 3.

כעת על מנת למצוא את החיתוך, נעביר את U לצורה של משוואות:

$$\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a\\ 1 & 1 & b\\ 1 & -1 & c\\ 0 & 0 & d\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b-a\\ 1 & -1 & c\\ 0 & 0 & d\end{array}\right)\xrightarrow[R_3+R_2]{R_3-R_1}\left(\begin{array}{cc|c}1 & 0 & a\\ 0 & 1 & b-a\\ 0 & 0 & -2a+b+c\\ 0 & 0 & d\end{array}\right)$$

לכן

$$U=\left\{(a,b,c,d)\left|\begin{array}{c}-2a+b+c=0\\ d=0\end{array}\right.\right\}$$

ולכן החיתוך הוא אוסף הפתרונות של כל המשוואות:

$$U\cap W=\left\{(a,b,c,d)\;\middle|\;\begin{matrix}a-b=0\\-2a+b+c=0\\d=0\end{matrix}\right\}$$

נפתור את מערכת המשוואות הזו על מנת למצוא בסיס:

$$\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\-2&1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2+2R_1}\begin{pmatrix}1&-1&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow[-R_2]{R_1-R_2}\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

המשתנה החופשי הוא $c=t$ והפתרון הכללי הינו $(t,t,t,0)$

ולכן הבסיס לחיתוך הינו $(1,1,1,0)$ והמימד הוא 1.