בדידה (88195), סמסטר קיץ תשפ"ג, מועד ב'

6.9.2023, כ' באלול התשפ"ג

מרצים: אריאל ויצמן, אלעד עטייא, דורון פרלמן, ארז שיינר.
מתרגלים: שירה גרינשטיין, רועי חסון, כנה נהיר, גלעד פורת-קורן, עדו פלדמן, הראל רוזנפלד, אושרית שטוסל, פבל שטיינר.
אורך המבחן: 3 שעות.
חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
הנחיות:

- יש לענות על **כל** השאלות .
- נמקו תשובתכם היכן שנדרש.

המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק..

ניתן לענות משני צידי הדף..

בהצלחה!

1. (30 נק') תזכורת: ההפרש הסימטרי של קבוצות A,B מוגדר להיות:

$$A\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$$

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

(א) לכל קבוצה A מתקיים: $P\left(A\right)\cap P\left(P\left(A\right)\right)=\{\emptyset\}$.

(ב) לכל קבוצות A,B,C מתקיים: $A\Delta(B\cup C)=(A\Delta B)\cup(A\Delta C)$.

(ג) לכל קבוצות A,B,C מתקיים: $A\setminus B=A\setminus C$ אם ורק אם $A\cap B=A\cap C$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

2. (8 נק') לכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ נגדיר:

$$S_n = \{(A, B) \in P(\mathbb{N}) \times P(\mathbb{N}) \mid A \cup B = \{1, \ldots, n\}\}$$

הוכיחו שלכל $1 \leq n \in \mathbb{N}$ מתקיים:

$$|S_n| = 3^n$$

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

3. (28 נק') נתבונן ביחס "מחלק את" על קבוצת הטבעיים $\mathbb{N}$:

$$R = \{(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists c \in \mathbb{N} : b = ac\}$$

הערה: הביטויים מינימלי, מקסימלי, קטן ביותר, גדול ביותר, אינפימום וסופרימום בשאלה זו הם בהקשר ליחס "מחלק את".

(א) הוכיחו כי R יחס סדר חלקי.

(ב) מצאו תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{N}$ כך ש: קיים $s = \sup A$ וגם $s \notin A$.

(ג) מצאו תת-קבוצה $B \subseteq \mathbb{N}$ כך שבקבוצה B יש איבר מקסימלי יחיד ואין בה איבר גדול ביותר.

(ד) תהא $X \subseteq \mathbb{N}$. הוכיחו שאם יש בקבוצה X איבר מינימלי יחיד אז הוא הקטן ביותר ב-X.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

4. (21 נק') על $X = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ (קבוצת הפונקציות מהממשיים לעצמם) נגדיר יחס $\sim$ באופן הבא:

$$f \sim g \iff \exists y \in \mathbb{R} \forall x > y : f(x) = g(x)$$

ידוע כי $\sim$ הוא יחס שקילות (אין צורך להוכיח זאת).

(א) נתבונן בפונקציות $g(x) = x + 1, h(x) = x + 2$. הוכיחו כי $g \notin [h]_{\sim}$.

(ב) תהא $f \in [Id]_{\sim}$ (כאשר $[Id]_{\sim}$ היא מחלקת השקילות של פונקציית הזהות), נסמן ב-A את קבוצת נקודות השבת של f:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = x\}$$

קבעו והוכיחו האם $|A|$ היא סופית, $\aleph_0$, א, $2^{\aleph}$, או אחרת.

(ג) תהא $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. קבעו והוכיחו האם $|[f]_{\sim}|$ היא סופית, $\aleph_0$, א, $2^{\aleph}$, או אחרת.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

5. (18 נק') יהי $0 < r \in \mathbb{R}$, תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא r-דלילה אם לכל $a \neq b \in A$ מתקיים ש $|a - b| > r$.
תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ תיקרא דלילה אם קיים $0 < r \in \mathbb{R}$ כך ש A היא r-דלילה.

(א) יהי n טבעי, ותהיינה $A_1, \ldots, A_n$ קבוצות דלילות. הוכיחו שהחיתוך $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ הוא קבוצה דלילה.

(ב) יהי $0 < r \in \mathbb{R}$. הוכיחו שכל קבוצה A שהיא r-דלילה היא בת-מנייה.

(ג) יהי $0 < r \in \mathbb{R}$. הוכיחו שקיימת תת-קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}$ שהיא r-דלילה, ובנוסף לכל $x \in \mathbb{R}$ קיים $a \in A$ כך ש $|x - a| < r$.

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___

דף נוסף לשאלה מספר___