- צורות חד מימדיות - עקומה
- צורות דו מימדיות - משטחים

חוקרים תכונות גיאומטריות באמצעות כלים מחדו"א:

- נגזרות מסדר 1 - קירוב לינארי
  - בעקומה - ישר משיק
  - במישור - קירוב ע"י מישור משיק
- נגזרות מסדר 2 - קירוב ריבועי
  - בעקומות - קירוב ע"י פרבולה
  - במשטחים:
    - קירוב ע"י גרפים של תבניות ריבועיות.
    - משטח ריבועי - $z = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f$ - משטח המוגדר ע"י משוואה ממעלה 2 במשתנים x, y, z

שרטוט וסיווג גרפים של תבניות ריבועיות

$$z = ax^2 + bxy + cy^2$$

$$\underbrace{v}_{\text{vector}} \to \underbrace{a}_{\text{scalar}}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \to z$$

דוגמאות

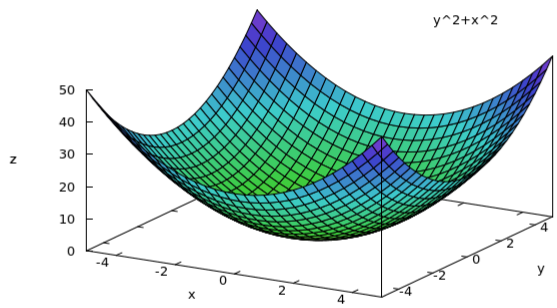
דוגמה 1

$z = x^2 + y^2$

$$\begin{aligned} z &= 2 & x^2 + y^2 &= 2 \\ z &= 1 & x^2 + y^2 &= 1 \\ z &= 0 & x^2 + y^2 &= 0 \\ z &= -1 & x^2 + y^2 &= -1 \end{aligned}$$

נראה בינתיים שמדובר בקונוס - אבל צריך גם להציב חתכי גובה, ולא רק חתכי רוחב:

$$\begin{aligned} x &= 0 & z &= y^2 \\ y &= 0 & z &= x^2 \end{aligned}$$



וקיבלנו פרבולואיד אליפטי:

משוואה מהצורה $z = ax^2 + by2$, $a, b > 0$ (כל חתכי הגובה אליפסות) תמיד תראה ככה.

באופן כללי, תמיד כדאי לבדוק גם עקומות רמה(מציבים $z = *$) וגם קוי גובה(מציבים $x = 0$ או $y = 0$)

דוגמה 1'

$z = ax^2 + by^2$, $a, b < 0$, מקבלים פרבולואיד אליפטי, אבל הפוך.

דוגמה 2

$z = x^2 - y^2$.

נבדוק קוי גובה:

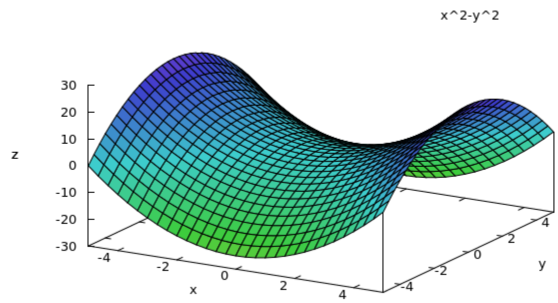
$$\begin{aligned} x &= 0 \qquad z = -y^2 \\ y &= 0 \qquad z = x^2 \end{aligned}$$

כלומר על מישור ה$[yz]$ יש לנו פרבולה בוכה, ועל מישור ה$[xz]$ יש לנו פרבולה צוחקת.

נבדוק משטחי רמה:

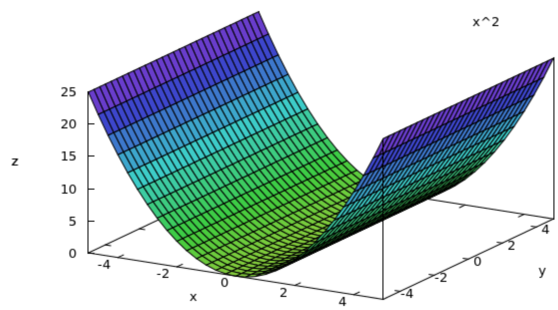
$$\begin{aligned} z &= 2 \qquad x^2 - y^2 = 2 \\ z &= 1 \qquad x^2 - y^2 = 1 \\ z &= 0 \qquad x^2 - y^2 = 0 \\ z &= -1 \qquad x^2 - y^2 = -1 \\ z &= -2 \qquad x^2 - y^2 = -2 \end{aligned}$$

נשים לב שב$z = 0$ קיבלנו את הישרים $\begin{matrix} y = x \\ y = -x \end{matrix}$, כאשר $z < 0$ קיבלנו היפרבולות שחותכות את ציר הy, וכאשר $z > 0$ קיבלנו היפרבולות שחותכות את ציר הx. סה"כ קיבלנו את הצורה שנקראת פרבולואיד היפרבולי:



דוגמה 3

$z = x^2$. קל לראות שעל כל חתך גובה $y = *$ נקבל את אותה פרבולה. לכן נקבל צילינדר פרבולי:



אותו דבר כמובן נקבל לכל משוואה מהצורה $z = ax^2 + by^2$ כאשר $a = 0$ או $b = 0$.

דוגמה 4

$z = 0$. כאן כמובן נקבל את המישור $[xy]$

באופן כללי

כל המשטחים הריבועיים אמורים להיראות כמו אחת מהצורות האלה, עד כדי והזזה.

דוגמה

$z = 3x^2 + 4xy + 3y^2 \Leftarrow$ איך נראה המשטח? יהיה קשה לנו לראות.

ניתן להציג את הביטוי(כל תבנית ריבועית) בשפה של מטריצות. נרצה שהיא תהיה מטריצה סימטרית:

$$\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

נרצה להבין את פעולת המטריצה A. ניתן להבין אותה בתור:

- העתקה לינארית: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
- תבנית בי־לינארית: $\underbrace{v, w}_{\text{vectors}} \mapsto \underbrace{w^t A v}_{\text{scalar}}$
  - כל תבנית בי־לינארית גם מגדירה תבנית ריבועית: $v \mapsto v^t A v$

מטרה - "להבין" איך המטריצה A פועלת כהעתקה לינארית

ווקטורים עצמיים של A הם ווקטורים v כך ש$A \cdot v = \lambda \cdot v$, כאשר λ סקלר שנקרא ערך עצמי.

כלומר ההעתקה לא מסובבת את הווקטור, אלא רק מותחת אותו.

מציאת ע"ע וו"ע

1. פותרים פולינום אופייני: רוצים ללמשוואה $A \cdot v - \lambda v = 0$ יהיו פתרונות לא טריוויאלים. בשביל זה צריך לפתור את הפולינום האופייני: $\det(A - \lambda I) = 0$.

2. לכל λ_i מוצאים <u>בסיס</u> למרחב הפתרונות. רוצים בסיס <u>מנורמל</u>(באורך 1)

בדוגמה שלנו

.1

$$\det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)^2 - 2 \cdot 2 = 0$$

$$\lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = 5 \qquad \lambda_2 = 1$$

2. $\lambda_1 = 5$ $\quad \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -2x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = 1 \\ y = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. ננרמל:

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 2x + 2y = 0 \Rightarrow \begin{matrix} x = -1 \\ y = 1 \end{matrix}$. ננרמל: $v_2 =$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

בעיקרון, כאשר מחפשים ערכים עצמיים אפשר "לא למצוא". אבל - לכל מטריצה סימטרית ממשית יש 2 ע"ע(עד כדי ריבוב), והווקטורים העצמיים מאונכים זה לזה:

$$v_1 \cdot v_2 = 0 \Rightarrow v_1 \perp v_2$$

נקבל שכל וקטור יימתח פי 1 על הציר $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, ופי 5 על הציר $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ - לכן נקבל אליפסה.

ברגע שמבינים מה הצירים שההעתקה פועלת עליהם בצורה פשוטה, נרצה להחליף את מערכת הצירים. במערכת הצירים החדשה ההעתקה מקבלת את הצורה

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$$

ואז

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

במערכת הצירים החדשה המשוואה היא

$$z = 5\tilde{x}^2 + 1\tilde{y}^2$$

ולכן נקבל פרבולואיד אליפטי.

מטריצת מעבר

הקואורדינטות הישנות - $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. בקואורדינטות החדשות - $\tilde{x} = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{pmatrix}$. נרצה דרך לעבור ביניהם.

נשתמש בוקטורים העצמיים שמצאנו, ונבנה מטריצת מעבר:

$$P = \begin{pmatrix} [v_1] & [v_2] \end{pmatrix}$$

(כלומר מטריצה שעמודותיה הם הווקטורים העצמיים).

מובטח לנו שהווקטורים העצמיים אורתוגונלים, ומכיוון שאנו תמיד בוחרים ווקטורים עצמיים נורמליים המטריצה P היא תהיה אורתונורמלית, כלומר $P^{-1} = P^t$.

עכשיו ניתן לעבור בסיסים:

$$P\tilde{x} = x \qquad \tilde{x} = P^{-1}x = P^t x$$

עכשיו, אם נסמן בD את ההעתקה בבסיס החדש, נקבל

$$A = PDP^t$$

כלומר:

- P^t מעבירה את הווקטור לבסיס החדש
- D מבצעת את ההעתקה בבסיס החדש
- P מחזירה את הווקטור לבסיס הישן

ניסוח נוסף למשפט

כל מטריצה סימטרית ממשית ניתנת ללכסון אורתוגונלי

- לכסון אורתוגונלי הוא לכסון ע"י מטריצת מעבר P אורתוגונלית
- לכסון אורתוגונלי שקול לסיבוב/היפוך של מערכת הצירים

בכל מקרה של "סיבוב" מערכת הצירים, מטריצת מעבר תהיה <u>מטריצת סיבוב</u> בα:

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

הערה

הכיוון שעליו הערך העצמי הגבוה ביותר, הוא הכיוון שבו נטפס הכי מהר למעלה(על ציר הz)