הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגול 5

חוקי המספרים הגדולים

תזכורת:

(1) $X_n \xrightarrow{a.s.} X$ אם $P(X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)) = 1$.

(2) $X_n \xrightarrow{P} X$ אם לכל ε, $P(|X_n - X| \geq \varepsilon) \longrightarrow 0$.

(3) $X_n \xrightarrow{d} X$ אם בכל נקודת רציפות של F_X, $F_{X_n}(t) \longrightarrow F_X(t)$.

משפט: (החוק החזק של המספרים הגדולים)

יהיו $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת בזוגות ושו"ה עם תוחלת $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. אז $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{a.s.} \mu$.

משפט: (החוק החלש של המספרים הגדולים)

יהיו $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת בזוגות ושו"ה עם תוחלת $\mathbb{E}[X_i] = \mu$. אז $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{P} \mu$.

תרגיל:

יהיו $X_1, X_2, \dots$ ממבתשו"ה בעלי תוחלת μ, ויהי $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i X_{i+1}$.

הוכיחו $Y_n \xrightarrow{P} \mu^2$.

הוכחה:

נגדיר $Z_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n/2} X_{2i-1} X_{2i}$, $Z'_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n/2} X_{2i} X_{2i+1}$. אז $Y_n = Z_n + Z'_n$.

כעת Z_n ו- Z'_n מכילים סכומים של ממבתשו"ה, ולכן

$$Z_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n/2} \sum_{i=1}^{n/2} X_{2i-1} X_{2i} \xrightarrow[WLLN]{P} \frac{\mu^2}{2}$$

$$Z'_n \xrightarrow[WLLN]{P} \frac{\mu^2}{2}$$

$$\Longrightarrow Z_n + Z'_n \xrightarrow{P} \mu^2$$

$$P\big(f(X_n)\in A,\ f(X_{n+1})\in B\big)=P\big(X_n\in f^{-1}(A),\ X_{n+1}\in f^{-1}(B)\big)=$$
$$=P\big(X_n\in f^{-1}(A)\big)\cdot P\big(X_{n+1}\in f^{-1}(B)\big)=$$
$$=P\big(f(X_n)\in A\big)\cdot P\big(f(X_{n+1})\in B\big)$$

תרגיל:

תנו דוגמה לסדרת מ"מ ב"ת עם אותה תוחלת μ שעבורם

$$\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\xrightarrow{P}\mu,\qquad \frac{X_1+\dots+X_n}{n}\ \cancel{\xrightarrow{a.s.}}\ \mu$$

פתרון:

נגדיר סדרת משתנים

$$P(X_n=n+1)=P(X_n=-(n+1))=\frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}$$

$$P(X_n=0)=1-\frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}$$

$$\mathbb{E}[X_n]=0\quad,\quad Var(X_n)=\mathbb{E}[X_n^2]=2(n+1)^2\cdot\frac{1}{2(n+1)\log(n+1)}=\frac{n+1}{\log(n+1)}$$

נראה התכנסות בהסתברות:

$$P\left(\left|\tfrac{1}{n}S_n\right|\geq\varepsilon\right)\underset{\text{צ'בישב}}{\leq}\frac{Var(\frac{1}{n}S_n)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)}{\log(n+1)}}{\varepsilon^2}=\frac{n+1}{\varepsilon^2 n^2\log(n+1)}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

הרעיון למה אין התכנסות a.s.: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\log(n+1)}=\infty$. לכן לפי בורל-קנטלי יהיו אינסוף מ"מ שעבורם $X_n=n+1$.

הגדרה:

יהי $2\le b\in\mathbb{N}$, ויהי $x\in\mathbb{R}$. עבור רצף ספרות s בבסיס b, נסמן ב-$N_n(s,x)$ את כמות הפעמים ש-s מופיע ב-n הספרות הראשונות בפיתוח של x לפי בסיס b.

אומרים ש-x הוא <u>נורמלי בבסיס b</u>, אם לכל s מתקיים

$$\frac{N_n(s,x)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} b^{-|s|}$$

($|s|$ = האורך של s).

אומרים ש-x <u>נורמלי</u> אם הוא נורמלי ביחס לכל בסיס.

<u>משפט</u>: (בורל, 1909)

כמעט כל מספר ממשי הוא נורמלי.

<u>הוכחה</u>:

<u>רדוקציה 1</u>: מספיק להוכיח שכמעט כל מספר ממשי הוא נורמלי ביחס לבסיס b מסוים. למה?

$$\left\{\text{מספרים נורמליים}\right\}=\bigcap_{b=2}^{\infty}\left\{\begin{matrix}\text{מספרים נורמליים}\\ \text{בבסיס } b\end{matrix}\right\}$$

<u>רדוקציה 2</u>: מספיק להוכיח שלכל b ולכל רצף ספרות s בבסיס b, לכמעט כל x מתקיים $\frac{N_n(s,x)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{} b^{-|s|}$.

<u>"רדוקציה"</u>: מספיק להסתכל על $x\in[0,1]$.

נגריל $X\sim U[0,1]$, ונכתוב $X=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{X_n}{b^n}$. X_n = הספרה ה-n-ית של X בבסיס b אחרי הנקודה

כיוון ש-X אחיד, $X_1,X_2,\dots$ ב"ת.

$X=0.X_1X_2X_3\dots$

נגדיר $Y_k = \mathbb{1}_{\{(X_k,\dots,X_{k+|s|-1})=s\}} =$ s מופיע מהמקום ה-k והלאה.

$$\frac{N_n(s,X)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-|s|} Y_k$$

לכל $1\le m\le |s|$, המשתנים $Y_m, Y_{m+|s|}, Y_{m+2|s|},\dots$ ב״ת ובעלי תוחלת $b^{-|s|}$.

לפי ה-SLLN, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\frac{n-m}{|s|}} Y_{m+|s|k} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{|s|}b^{-|s|}$

וכשנחבר נקבל $\frac{N_n(s,X)}{n} \xrightarrow{a.s.} b^{-|s|}$. □

התכנסות חלשה

הגדרה:

אומרים שסדרת מידות μ_n על מרחב Ω מתכנסת חלש למידה μ על Ω ומסמנים $\mu_n \xrightarrow{w} \mu$, אם לכל $X_n\sim\mu_n$, $X\sim\mu$ ולכל $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה וחסומה,

$$\mathbb{E}[h(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[h(X)].$$

נסמן גם $X_n \xrightarrow{w} X$.

משפט: (למת Portmanteau)

יהיו $X, X_1, X_2,\dots$ מ״מ על Ω. אז התנאים הבאים שקולים:

א. $X_n \xrightarrow{d} X$.

ב. $X_n \xrightarrow{w} X$.

ג. לכל פונקציה חסומה וליפשיץ h, $\mathbb{E}[h(X_n)] \longrightarrow \mathbb{E}[h(X)]$.

ד. לכל פונקציה רציפה ואי-שלילית, $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[h(X_n)] \ge \mathbb{E}[h(X)]$.

דוגמה:

$\mathrm{Bin}(n, \frac{c}{n}) \longrightarrow \mathrm{Poi}(c)$.

תרגיל:

נניח $X_n \xrightarrow{d} X$, $Y_n \xrightarrow{d} Y$. האם $X_n+Y_n \xrightarrow{d} X+Y$?

פתרון:

לא! $X_n \sim U[0,1]$, $Y_n = -X_n \sim U[-1,0]$.

$$X_n \xrightarrow{d} X \sim U[0,1], \quad Y_n \xrightarrow{d} Y \sim U[-1,0]$$

עותקים ב"ת.

$$X_n+Y_n = 0 \not\xrightarrow{d} X+Y$$

משפט: (משפט סלוצקי, 1925, מיוחס גם לקרמר)

אם $X_n \xrightarrow{d} X$ ו- $Y_n \xrightarrow{d} c$ (קבוע), אז $X_n+Y_n \xrightarrow{d} X+c$, $X_nY_n \xrightarrow{d} cX$,

ואם c הפיך אז $\frac{X_n}{Y_n} \xrightarrow{d} \frac{X}{c}$.

אבל גם: אם X_n, Y_n ב"ת, אז באמת $X_n+Y_n \xrightarrow{d} X+Y$.

$X_n \xrightarrow{d} X$

$Y_n \xrightarrow{d} Y$

ב"ת