

**בחינת סיום (מועד א') בקורס
מבנים אלגבריים להנדסה (83218)**

מרצה: פרופ' נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

נא לענות על 4 מתוך 5 השאלות. בכל שאלה, סעיף א' שווה 15 נקודות וסעיף ב' שווה 10 נקודות.
חומר עזר מותר בשימוש: מחשבון בלבד.

בהצלחה!

שאלה 1

- א. תהי G חבורה ותהיינה G_1, G_2 תתי חבורות שלה. הוכיחו כי $G_1 \cap G_2$ גם היא תת חבורה של G .
- ב. תהי G חבורה בת 6 איברים. נניח שיש ל- G שתי תתי חבורות שונות G_1, G_2 בנות 3 איברים כל אחת. יהי $g \in G$ כך ש- g איננו נמצא ב- $G_1 \cup G_2$. הוכיחו כי מתקיים $g^2 = e$.

שאלה 2

- א. תנו דוגמא לחבורה G בת יותר משני איברים בה הסדר של כל איבר הוא 1 או 2.
- ב. תהי G חבורה בה הסדר של כל איבר הוא 1 או 2. הוכיחו כי G קומוטטיבית.

שאלה 3

- א. יהיו $a(x), b(x)$ פולינומים. נניח שביצענו חילוק עם שארית וקיבלנו $a(x) = b(x)c(x) + r(x)$. הוכיחו כי מתקיים $\gcd(a(x), b(x)) = \gcd(b(x), r(x))$.
- ב. הוכיחו כי כל תת חבורה של החבורה $(\mathbb{Z}, +)$ היא ציקלית.

שאלה 4

- א. תנו דוגמא לשני חוגים אינסופיים לא קומוטטיביים שאינם איזומורפיים זה לזה. (כמובן, עליכם להסביר מדוע החוגים שבחרתם אינם איזומורפיים).
- ב. נתבונן בשדה $Q[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} : a, b \in Q\}$, כאשר Q הוא שדה המספרים הרציונליים. הוכיחו כי $Q[\sqrt{3}]$ איזומורפי לשדה $Q[x]/\langle x^2 - 3 \rangle$, כאשר $\langle x^2 - 3 \rangle$ הוא האידיאל הנוצר ע"י הפולינום $f(x) = x^2 - 3$ בחוג הפולינומים $Q[x]$.

שאלה 5

- א. נתבונן בשדה הסופי עם q איברים, המסומן ב- F_q . הוכיחו כי החבורה החיבורית של השדה הינה ציקלית אם ורק אם q הוא מספר ראשוני.
- ב. החבורה הכפלית של השדה F_3 הינה איזומורפית לחבורה החיבורית של השדה F_2 . האם קיים זוג נוסף של שדות סופיים F_k, F_l כך שהחבורה הכפלית של F_k איזומורפית לחבורה החיבורית של F_l ?